$1^{\underline{a}}$ Avaliação SMA5942 – Geometria I

Programa de Pós-graduação em Matemática – ICMC USP
Prof. Fernando Manfio

Nome: **Nº USP:**

1. Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável.

(a) Descreva o conceito de valor regular para f.

(b) Se $q \in \mathbb{R}^n$ é valor regular para f, prove que $f^{-1}(q)$ é uma subvariedade Euclidiana de $\mathbb{R}^m$ e calcule sua dimensão.

2. Prove que o grupo ortogonal $O(n)$, visto como subconjunto das matrizes reais de ordem $n \times n$, é uma subvariedade Euclidiana compacta e calcule sua dimensão.

3. Prove que toda imersão $f : M^m \to N^n$ entre duas variedades diferenciáveis M^m e N^n é, localmente, um mergulho.

4. Considere o espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$ definido pelo quociente

$$\mathbb{R}P^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim,$$

cujas classes de equivalências são identificadas, geometricamente, com as retas em $\mathbb{R}^{n+1}$ que passam pela origem.

(a) Prove que $\mathbb{R}P^n$ é compacto.

(b) Prove que a aplicação quociente π é um difeomorfismo local, em particular uma submersão.

Valor das questões:

1.	2,5
2.	2,5
3.	2,0
4.	3,0

Solução

1. (a) Um ponto $q \in \mathbb{R}^n$ é dito *valor regular* para f se $f^{-1}(q)$ contém apenas pontos regulares, i.e., se para todo $x \in f^{-1}(q)$, a diferencial $df(x)$ é sobrejetora.

(b) Basta provar que $f^{-1}(q)$ é, localmente, gráfico de aplicação diferenciável. Dado $p \in f^{-1}(q)$, com $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n$, suponha que $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$, visto que $\mathrm{d}f(p)$ é sobrejetora. Assim, pelo teorema da aplicação implícita, existem um aberto $Z = U \times W$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^m$ contendo x_0 e W é um aberto de $\mathbb{R}^{n-m}$ contendo y_0, e uma aplicação diferenciável $g : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ tais que $f(x, g(x)) = q$, para todo $x \in U$. Isso mostra que $f^{-1}(q) \cap Z = \mathrm{Gr}(g)$.

2. O *grupo ortogonal* $O(n)$ é o subconjunto de $M(n)$ definido por

$$O(n) = \{X \in M(n) : XX^t = I\}.$$

A fim de provar que $O(n)$ é subvariedade Euclidiana de $M(n)$, considere a aplicação $f : M(n) \to \mathcal{S}(n)$ dada por $f(X) = XX^t$, onde $\mathcal{S}(n)$ denota o subespaço de $M(n)$ constituído das matrizes simétricas. Dessa forma, tem-se $O(n) = f^{-1}(I)$, onde I denota a matriz identidade. Assim, basta provar que $I \in \mathcal{S}(n)$ é valor regular para f. A aplicação f é diferenciável e vale

$$\mathrm{d}f(X) \cdot H = XH^t + HX^t.$$

Assim, dados $X \in O(n)$ e $S \in \mathcal{S}(n)$, e tomando $V = \frac{1}{2}SX$, tem-se $\mathrm{d}f(X) \cdot V = S$, mostrando que $\mathrm{d}f(X)$ é sobrejetora. Portanto, $O(n)$ é subvariedade Euclidiana de $M(n) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$. Como $\dim \mathcal{S}(n) = \frac{n(n+1)}{2}$, tem-se que

$$\dim O(n) = \dim M(n) - \dim \mathcal{S}(n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

3. Decorre da forma local das imersões que, em cartas locais apropriadas (U, φ) e (V, ψ) para M^m e N^n, respectivamente, a representação de f é dada por

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = (x, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m},$$

para todo $x \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$. Esta aplicação é a inclusão canônica do aberto $\varphi(U)$ de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$, que é um mergulho. Logo, $f|_U$ é um mergulho.

4. (a) Seja $p\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$ a restrição da projeção $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1}-\{0\} \to \mathbb{R}P^n$, i.e., $p = \pi|_{\mathbb{S}^n}$. Note que p é diferenciável, pois é a restrição de uma aplicação diferenciável à hipersuperfície $\mathbb{S}^n$. Além disso, p é sobrejetora pois, dado $[x] \in \mathbb{R}P^n$, com $[x] \neq 0$, tem-se

$$p\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \pi(x) = [x].$$

Assim, $\mathbb{R}P^n = p(\mathbb{S}^n)$. Ou seja, a relação de equivalência determinada por p em $\mathbb{S}^n$ coincide com aquela determinada por π em $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$. Como $\mathbb{S}^n$ é compacto e p é contínua, tem-se $\mathbb{R}P^n$ compacto.

(b) Considere o atlas

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) : 1 \leq i \leq n+1\}$$

em $\mathbb{R}P^n$, onde

$$U_i = \{[x] : x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1},\ x_i \neq 0\}.$$

Como

$$\mathbb{S}^n = \bigcup_{i=1}^{n} p^{-1}(U_i)$$

é uma cobertura aberta, basta provar que, para todo $1 \leq i \leq n+1$, a aplicação

$$x \in p^{-1}(U_i) \mapsto \varphi_i(p(x)) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$$

é um difeomorfismo local. Temos que $p^{-1}(U_i)$ é igual à união dos abertos disjuntos

$$B_i^+ = \{x \in \mathbb{S}^n : x_i > 0\} \quad \text{e} \quad B_i^- = \{x \in \mathbb{S}^n : x_i < 0\}.$$

Afirmamos que a restrição de $\varphi_i \circ p$ a B_i^+ é um difeomorfismo sobre $\mathbb{R}^n$. De fato, sua inversa é a aplicação diferenciável ψ_i dada por

$$\psi_i(x) = \frac{(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{\sqrt{1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2}} \in B_i^+,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Analogamente, a restrição de $\varphi_i \circ p$ a B_i^- é um difeomorfismo sobre $\mathbb{R}^n$, pois sua inversa é igual a $-\psi_i$. Portanto, p é um difeomorfismo local.