1ª **Avaliação de Geometria Diferencial – SMA0175**
Bacharelado em Matemática Aplicada e Computação Científica
Prof. Fernando Manfio

Nome: ______________________________ **No USP:** ____________

1. Calcule o posto da aplicação $f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x,y) = (x^2, y^2, (x+y)^2).$$

2. Considere a aplicação $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (x^3+y^3, x^3-y^3)$. Prove que f é diferenciável e calcule sua diferencial no ponto $p=(1,-1)$ na direção do vetor $v=(0,2)$.

3. Considere uma função diferenciável $f\colon U \to \mathbb{R}$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^3$, e um ponto $x \in U$ tal que $df(x) \neq 0$. Prove que, dentre todos os vetores $v \in \mathbb{R}^3$, com $\|v\| = 1$, a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ atinge seu valor máximo quando $v = \nabla f(x)/\|\nabla f(x)\|$.

4. Prove que o conjunto

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$$

é uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$.

5. Considere uma superfície rotacional M, parametrizada por

$$\varphi(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)),$$

onde f e g são funções deriváveis, com $f(u) > 0$ e $g'(u) \neq 0$, para todo $u \in (a,b)$ e $0 < v < 2\pi$. Prove que M é orientável e que todas as retas normais a M interceptam o eixo-z.

6. Prove que se todas as retas normais a uma superfície regular conexa M interceptam-se num ponto fixado, então M está contida numa esfera.

Pontuação:

1.	1,0
2.	1,0
3.	2,0
4.	2,0
5.	2,0
6.	2,0

Solução da 1^{a} Avaliação de Geometria Diferencial – SMA0175

1. A aplicação f é diferenciável pois cada uma de suas funções coordenadas é diferenciável. Além disso, para cada ponto $(x, y) \neq (0, 0)$, os vetores coluna da matriz jacobiana de f em (x, y) são $2(x, 0, x + y)$ e $2(0, y, x + y)$, e estes são L.I., visto que as duas primeiras coordenadas são sempre L.I. para $(x, y) \neq (0, 0)$. Logo, o posto de f é 2 em qualquer ponto $(x, y) \neq (0, 0)$.

2. A aplicação f é diferenciável pois cada uma de suas funções coordenadas é diferenciável. A diferencial de f num ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é dada, matricialmente, por

$$df(x, y) = 3 \begin{pmatrix} x^2 & y^2 \\ x^2 & -y^2 \end{pmatrix}.$$

Assim, no ponto $p = (1, -1)$, e considerando o vetor $v = (0, 2)$, temos

$$df(p) \cdot v = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot (0, 2) = (6, -6).$$

3. Dado um vetor $v \in \mathbb{R}^3$, com $\|v\| = 1$, segue da definição de gradiente e da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = df(x) \cdot v = \langle \nabla f(x), v \rangle \leq \|\nabla f(x)\| \cdot \|v\| = \|\nabla f(x)\|.$$

A igualdade acima ocorre se, e somente se, $v = \nabla f(x)/\|\nabla f(x)\|$, visto que $\nabla f(x) \neq 0$.

4. Note que M é o conjunto $f^{-1}(0)$, onde $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é a função dada por

$$f(x, y, z) = 2x^2 - y^2 + z^2 - 1.$$

Em virtude do Exercício 4, basta verificar que $0 \in \mathbb{R}$ é valor regular para f. De fato, f é diferenciável e suas derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z.$$

Tais derivadas são nulas simultaneamente somente no ponto $(0, 0, 0)$, o qual não pertence ao conjunto $f^{-1}(0)$, pois $f(0, 0, 0) = -1 \neq 0$. Isso mostra que todo ponto de $M = f^{-1}(0)$ é ponto regular de f, logo M é superfície regular.

5. Para provar que M é orientável, basta exibir um campo normal diferenciável N ao longo de M. Em relação à parametrização φ dada, temos:

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (f'(u)\cos v, f'(u)\sin v, g'(u)) \\ \varphi_v &= (-f(u)\sin v, f(u)\cos v, 0) \end{aligned}.$$

Calculando o produto vetorial entre φ_u e φ_v, obtemos

$$N(u, v) = \varphi_u \times \varphi_v = f(u)\big(-g'(u)\cos v, g'(u)\sin v, f'(u)\big)$$

que, por construção é normal à superfície M. Para a segunda parte, dado um ponto $p = \varphi(u, v) \in M$, seja

$$r_p(t) = \varphi(u, v) + tN(u, v), \ t \in \mathbb{R},$$

a reta normal a M, ou seja,

$$r_p(t) = \big(f(u)\cos v(1 - tg'(u)), f(u)\sin v(1 - tg'(u)), g(u) + tf(u)f'(u)\big).$$

Para o instante $t = \frac{1}{g'(u)}$, tem-se

$$f_p(t) = \left(0, 0, g(u) + \frac{f(u)f'(u)}{g'(u)}\right),$$

provando que as retas normais a M interceptam o eixo-z.

6. Seja $\varphi\colon U \to \varphi(U)$ uma parametrização de M e denote por $N = N(u,v)$ o correspondente campo normal unitário a M ao longo da vizinhança coordenada $\varphi(U)$. Por hipótese, existe um ponto $p_0 \in \mathbb{R}^3$ tal que

(1) $$\varphi(u,v) + f(u,v)N(u,v) = p_0,$$

para todo $p = \varphi(u,v)$, onde f é uma função diferenciável definida em $\varphi(U)$. Queremos provar que f é constante em $\varphi(U)$. Derivando (1) em relação a u e v, obtemos

(2) $$\varphi_u + f_u N + f N_u = 0$$

e

(3) $$\varphi_v + f_v N + f N_v = 0.$$

Por outro lado, como $\|N\| = 1$, tem-se

(4) $$2\langle N_u, N\rangle = 0,$$

o que implica que N_u é tangente a M. Analogamente tem-se que N_v é tangente a M. Tomando o produto interno em (2) por N, e usando (4), obtemos que $f_u = 0$. De forma análoga obtemos que $f_v = 0$, e isso implica que f é constante em $\varphi(U)$. Portanto, na vizinhança coordenada $\varphi(U)$, a superfície M está contida na esfera de centro em p_0 e raio $f(p)$, qualquer que seja $p \in \varphi(U)$. O fato de M ser conexa implica que em todas as demais vizinhanças coordenadas, M está contida na mesma esfera.