Geometria Riemanniana

Fernando Manfio
ICMC – USP

Sumário

Capítulo 1

Métricas Riemannianas e Conexões

1.1 Métricas Riemannianas

Definição 1.1.1. Uma *métrica Riemanniana* em uma variedade diferenciável M é uma correspondência $\langle , \rangle$ que associa, a cada ponto $p \in M$, um produto interno $\langle , \rangle_p$ em T_pM e que varia diferenciavelmente no sentido de que a função

$$p \in M \mapsto \langle X(p), Y(p) \rangle_p$$

é diferenciável para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Uma *variedade Riemanniana* é um par $(M, \langle , \rangle)$, onde M é uma variedade diferenciável e $\langle , \rangle$ é uma métrica Riemanniana em M. Dado uma uma carta local (U, φ) em $(M, \langle , \rangle)$, com $\varphi \sim (x_1, \ldots, x_n)$, denote por $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$ as 1-formas duais aos campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Dados $p \in U$ e $v, w \in T_pM$, escrevamos

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \quad \text{e} \quad w = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p).$$

Usando a bilinearidade da métrica, obtemos

$$\langle v, w \rangle_p = \sum_{i,j} g_{ij}(p) v_i w_j,$$

onde

$$g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle.$$

Como $g_{ij} = g_{ji}$, podemos escrever

$$\langle , \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_j = \sum_{i \leq j} \tilde{g}_{ij} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j,$$

onde

$$\tilde{g}_{ii} = g_{ii} \quad \text{e} \quad \tilde{g}_{ij} = 2g_{ij}, \text{ se } i \neq j.$$

Exemplo 1.1.2. No espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, identifiquemos

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0),$$

com $1 \leq i \leq n$ e qualquer que seja o ponto $p \in \mathbb{R}^n$. Assim, a métrica é dada por

$$\langle e_i, e_j \rangle_p = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij},$$

ou seja,

$$\langle , \rangle = \mathrm{d}x_1^2 + \ldots + \mathrm{d}x_n^2.$$

Observação 1.1.3. Seja $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ outra carta local em M, com $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ e $\tilde{\varphi} \sim (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$. Então

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_i}(p) \frac{\partial}{\partial x_k}(p),$$

de modo que a relação entre as expressões locais de $\langle , \rangle$ em relação às cartas locais (U, φ) e $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ é dada por

$$\tilde{g}_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \right\rangle = \sum_{k,l} \frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_i} \frac{\partial x_l}{\partial \tilde{x}_j} g_{kl}.$$

Exemplo 1.1.4. A métrica Euclidiana em $\mathbb{R}^2$ é dada por

$$\langle , \rangle = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2.$$

Passando para coordenadas polares

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \cos \theta \mathrm{d}r - r \sin \theta \mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}y &= \sin \theta \mathrm{d}r + r \cos \theta \mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Assim,

$$\langle , \rangle = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2 \mathrm{d}\theta^2.$$

Exemplo 1.1.5. Considere uma superfície de rotação M^2 em $\mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$\varphi(s,\theta) = (a(s)\cos\theta, a(s)\sin\theta, b(s)),$$

onde a, b são funções diferenciáveis definidas num intervalo aberto de $\mathbb{R}$, com $a > 0$, e $\gamma(s) = (a(s), 0, b(s))$ é a curva geratriz de M^2, satisfazendo $\|\gamma'\|^2 = (a')^2 + (b')^2 = 1$. Considere M^2 munida da métrica Riemanniana $\langle , \rangle$ induzida de $\mathbb{R}^3$, i.e., cada plano tangente T_pM está munido do produto interno induzido de $\mathbb{R}^3$. Tais planos tangentes são gerados pelas derivadas parciais

$$\begin{aligned} \varphi_s &= \big(a'(s)\cos\theta, a'(s)\sin\theta, b'(s)\big) \\ \varphi_\theta &= \big(-a(s)\sin\theta, a(s)\cos\theta, 0\big). \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \langle , \rangle &= \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle \mathrm{d}s^2 + 2\langle \varphi_s, \varphi_\theta \rangle \mathrm{d}s\mathrm{d}\theta + \langle \varphi_\theta, \varphi_\theta \rangle \mathrm{d}\theta^2 \\ &= \mathrm{d}s^2 + a(s)^2 \mathrm{d}\theta^2. \end{aligned}$$

Exemplo 1.1.6. Seja $f : M \to N$ uma imersão entre variedades diferenciáveis, i.e., para cada ponto $p \in M$, a diferencial $\mathrm{d}f(p)$ é uma aplicação linear injetora. Suponha que N esteja munida de uma métrica Riemanniana $\langle , \rangle$. Podemos usar tal métrica para definir uma métrica em M da seguinte forma: dados $p \in M$ e $v, w \in T_pM$, definimos

$$\langle v, w \rangle_p = \langle \mathrm{d}f(p) \cdot v, \mathrm{d}f(p) \cdot w \rangle_{f(p)}.$$

Como $\mathrm{d}f(p)$ é injetora, segue que $\langle , \rangle_p$ é positivo definido. Além disso, a diferenciabilidade de f e $\langle , \rangle$ implicam que a métrica definida em M também é diferenciável.

Proposição 1.1.7. Toda variedade diferenciável M^n admite métrica Riemanniana.

Demonstração. Se $f : M^n \to \mathbb{R}^{2n+1}$ é um mergulho, dado pelo teorema de Whitney, o resultado segue do Exemplo 1.1.6. □

Dados uma variedade Riemanniana M e uma curva diferenciável por partes $\gamma : [a, b] \to M$, definimos o *comprimento* de γ pondo

$$l(\gamma) = \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_{\gamma(t)}} \mathrm{d}t.$$

Dados dois pontos $p, q \in M$, definimos a *distância* de p a q em termos de $\langle , \rangle$ pondo

$$d(p,q) = \inf_{\gamma \in \bigwedge_{p,q}} l(\gamma),$$

onde $\bigwedge_{p,q}$ denota o conjunto de todas as curvas diferenciáveis por partes unindo p a q.

Definição 1.1.8. Uma *isometria* entre duas variedades Riemannianas M e N é um difeomorfismo $f : M \to N$ que satisfaz

$$\langle v, w \rangle_p = \langle \mathrm{d}f(p) \cdot v, \mathrm{d}f(p) \cdot w \rangle_{f(p)},$$

para quaisquer $p \in M$ e $v, w \in T_pM$.

Exemplo 1.1.9. Dados variedades Riemannianas $(M_1^{n_1}, \langle , \rangle^1)$ e $(M_2^{n_2}, \langle , \rangle^2)$, considere a variedade produto $M^{n_1+n_2} = M_1 \times M_2$. Considerando as projeções $\pi_i : M \to M_i$, $i = 1, 2$, e dados $(p, q) \in M$ e $v, w \in T_pM$, definimos

$$\langle v, w \rangle_{(p,q)} = \langle \mathrm{d}\pi_1(v), \mathrm{d}\pi_1(w) \rangle_p^1 + \langle \mathrm{d}\pi_2(v), \mathrm{d}\pi_2(w) \rangle_q^2.$$

Dado uma variedade Riemanniana M, denote por $\mathrm{Iso}(M)$ o conjunto de todas as isometrias de M. Com a operação de composição, $\mathrm{Iso}(M)$ tem estrutura de grupo.

Teorema 1.1.10 (Myers-Steenrod [9])**.** *O grupo Iso(M) tem a estrutura de grupo de Lie em relação à topologia compacto-aberta. A isotropia, em qualquer ponto, é compacto. Além disso, se M é compacta o mesmo vale para Iso(M).*

1.2 A conexão de Levi-Civita

Definição 1.2.1. Uma *conexão afim* em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

que, a cada par de campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, associa um campo vetorial $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

(b) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

(c) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$.

O que faremos agora é analisar a dependência de uma conexão afim ∇ em cada um dos seus parâmetros.

Proposição 1.2.2. Dados um ponto $p \in M$ e campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o valor $(\nabla_X Y)(p)$ depende somente de $X(p)$ e da restrição de Y ao longo de uma curva diferenciável $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = X(p)$.

Demonstração. Mostremos inicialmente que, em qualquer aberto $U \subset M$, o campo vetorial $(\nabla_X Y)|_U$ depende somente de $X|_U$ e $Y|_U$. De fato, sejam $X', Y' \in \mathfrak{X}(M)$ tais que

$$X'|_U = X|_U \quad \text{e} \quad Y'|_U = Y|_U.$$

Considere uma função $f \in C^\infty(M)$, com $\operatorname{supp} f \subset U$, tal que $f \equiv 1$ em um aberto V de M, com $p \in V \subset \overline{V} \subset U$. Então, usando o item (b) da Definição 1.2.1 e o fato que $fX = fX'$ em M, temos

$$\begin{aligned} (\nabla_X Y)(p) &= f(p)(\nabla_X Y)(p) = (f\nabla_X Y)(p) = (\nabla_{fX} Y)(p) \\ &= (\nabla_{fX'} Y)(p) = f(p)(\nabla_{X'} Y)(p) \\ &= (\nabla_{X'} Y)(p). \end{aligned}$$

Isso mostra que $\nabla_X Y = \nabla_{X'} Y$ no aberto U. Por outro lado, como $fY = fY'$ em M, temos $\nabla_X(fY) = \nabla_X(fY')$. Assim, usando o item (c) e o fato que $X(p)(f) = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} (\nabla_X Y)(p) &= f(p)(\nabla_X Y)(p) = f(p)(\nabla_X Y)(p) + X(p)(f)Y(p) \\ &= (f\nabla_X Y)(p) + (X(f)Y)(p) = (f\nabla_X Y + X(f)Y)(p) \\ &= (\nabla_X(fY))(p) = (\nabla_X(fY'))(p) \\ &= (\nabla_X Y')(p), \end{aligned}$$

mostrando que $\nabla_X Y = \nabla_X Y'$ em U. Isso mostra que $(\nabla_X Y)|_U$ depende somente de $X|_U$ e $Y|_U$. Considere agora uma carta local (U, φ) em M, com $p \in U$ e $\varphi \sim (x_1, \ldots, x_n)$. Pelo que já foi provado, temos que

$$(\nabla_X U)|_U = \nabla_{X|_U}(Y|_U).$$

Escrevamos

$$X|_U = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad Y|_U = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

com $a_i, b_j \in C^\infty(U)$. Usando as propriedades de ∇ no aberto U, temos

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_X\left(\sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_j \left(b_j \nabla_X \frac{\partial}{\partial x_j} + X(b_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\
&= \sum_{i,j}\left(a_i b_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(b_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\
&= \sum_{i,j,k} a_i b_j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}
\end{aligned}$$

onde

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Assim, a representação local de $\nabla_X Y$ na carta local (U, φ) é dada por

$$(\nabla_X Y)|_U = \sum_k \left(\sum_{i,j} a_i b_j \Gamma_{ij}^k + \sum_i a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{1.1}$$

Em particular,

$$(\nabla_X Y)(p) = \sum_k \left(\sum_{i,j} a_i(p) b_j(p) \Gamma_{ij}^k(p) + X(p)(b_k)\right)\frac{\partial}{\partial x_k}(p).$$

A fórmula acima envolve somente os valores das funções a_i e b_j em p, e das derivadas direcionais de b_k na direção de $X(p)$, e isso finaliza a prova. □

As funções diferenciáveis Γ_{ij}^k são chamadas os *símbolos de Christoffel* da conexão ∇ em relação à carta local escolhida.

Observação 1.2.3. Como consequência da Proposição 1.2.2, podemos escrever $\nabla_{X(p)} Y$ ao invés de $(\nabla_X Y)(p)$. Isso pode ser visto como a derivada direcional do campo Y na direção do vetor $X(p)$.

Teorema 1.2.4. *Dado uma variedade Riemanniana $(M, \langle , \rangle)$, existe uma única conexão afim ∇ em M, chamada a conexão de Levi-Civita de M, satisfazendo as seguintes propriedades:*

(a) $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$,

(b) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$,

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Suponha, inicialmente, a existência de uma tal conexão ∇. Assim,

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, && (1.2)\\ Y\langle Z, X\rangle &= \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle, && (1.3)\\ Z\langle X, Y\rangle &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle. && (1.4) \end{aligned}$$

Somando (1.2) e (1.3), subtraindo (1.4) e usando o item (b), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \nabla_Y X, Z\rangle = \frac{1}{2}\big(& X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle \\ &- \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle\big) \end{aligned} \tag{1.5}$$

A fórmula (1.5), conhecida como *fórmula de Koszul*, define $\nabla_Y X$ de forma única, pois Z é arbitrário e $\langle , \rangle$ é não-degenerada. Para mostrar a existência, defina ∇ pela fórmula de Koszul. □

Uma conexão satisfazendo o item (a) do Teorema 1.2.4 é dita ser *compatível* com a métrica $\langle , \rangle$ (cf. Exercício 1). A condição (b) expressa o fato que a *torção* de ∇, definida por

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

é nula; diz-se também que a conexão é *simétrica*.

Observação 1.2.5. Dados uma conexão simétrica ∇ e uma carta local (U, φ) em M, com $\varphi \sim (x_1, \ldots, x_n)$, temos:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0,$$

para $1 \leq i, j \leq n$. Isso mostra que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Exemplo 1.2.6. O objetivo aqui é mostrar que a conexão de Levi-Civita ∇ em $\mathbb{R}^n$ coincide com a derivada usual de campos vetoriais em $\mathbb{R}^n$. De fato, se $(x_1, \ldots, x_n)$ são as coordenadas globais usuais em $\mathbb{R}^n$, temos

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0,$$

para quaisquer $1 \leq i, j \leq n$. Segue então da fórmula de Koszul (1.5) que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = 0$, com $1 \leq i, j \leq n$, ou seja, todos os símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k são nulos. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, e escrevendo

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

onde $a_i, b_j \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, segue da fórmula (1.1) que

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_k \left(\sum_i a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_k X(b_k) \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= X(Y) = \mathrm{d}Y(X), \end{aligned}$$

como queríamos.

Exemplo 1.2.7. Considere o semi-plano superior

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

munido da métrica Riemanniana

$$\langle , \rangle = \frac{1}{y^2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2).$$

Calculemos a conexão de Levi-Civita de $(\mathbb{R}_+^2, \langle , \rangle)$. Derivando a expressão

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \frac{1}{y^2}$$

em relação a x e y, e usando o item (a) do Teorema 1.2.4, obtemos

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = -\frac{1}{y^3}.$$

Além disso, derivando a expressão

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \frac{1}{y^2}$$

em relação a x e y, obtemos

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = -\frac{1}{y^3}.$$

Por outro lado, do item (b), obtemos

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x} = 0.$$

Assim, derivando

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = 0,$$

obtemos

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \frac{1}{y^3} \quad \text{e} \quad \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = 0.$$

Como $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$ são sempre ortogonais, obtemos

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{e} \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y}.$$

1.3 Transporte paralelo

Dado uma variedade Riemanniana M, denote por ∇ sua conexão de Levi-civita. Um *campo vetorial ao longo* de uma curva diferenciável $\gamma : I \to M$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, é uma aplicação diferenciável $X : I \to TM$ tal que $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$, para todo $t \in I$.

Proposição 1.3.1. Dado uma curva diferenciável $\gamma : I \to M$, existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial X ao longo de γ um outro campo vetorial $\frac{DX}{\mathrm{d}t}$ ao longo de γ, chamado a *derivada covariante* de X ao longo de γ, satisfazendo as seguintes propriedades:

(a) $\frac{D}{\mathrm{d}t}(X + Y) = \frac{DX}{\mathrm{d}t} + \frac{DY}{\mathrm{d}t}$,

(b) $\frac{D}{\mathrm{d}t}(fX) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}X + f\frac{DX}{\mathrm{d}t}$,

(c) Se X admite uma extensão a um campo vetorial $\tilde{X}$ definido num aberto $U \subset M$, então

$$\frac{DX}{\mathrm{d}t}(t) = \left(\nabla_{\gamma'(t)}\tilde{X}\right)(\gamma(t)),$$

para todo $t \in I$ satisfazendo $\gamma(t) \in U$.

Demonstração. Suponha, inicialmente, que exista uma correspondência satisfazendo os itens (a), (b) e (c), e seja (U, φ) uma carta local em M, com

$\varphi \sim (x_1, \ldots, x_n)$ e $\gamma(I) \cap U \neq \emptyset$. Se X é um campo vetorial ao longo de γ, podemos escrever

$$X(t) = \sum_j a_j(t) X_j(t),$$

onde $X_j(t) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\gamma(t))$. Dos itens (a) e (b) segue que

$$\frac{DX}{\mathrm{d}t} = \sum_j \left(\frac{\mathrm{d}a_j}{\mathrm{d}t} X_j + a_j \frac{DX_j}{\mathrm{d}t} \right).$$

Por outro lado, se $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ é a expressão local da curva γ em U, segue do item (c) que

$$\frac{DX_j}{\mathrm{d}t} = \nabla_{\gamma'(t)} X_j = \nabla_{\sum_i \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}} X_j = \sum_i \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \nabla_{X_i} X_j.$$

Assim,

$$\frac{DX}{\mathrm{d}t} = \sum_j \frac{\mathrm{d}a_j}{\mathrm{d}t} X_j + \sum_{i,j} a_j \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \nabla_{X_i} X_j. \tag{1.6}$$

Segue de (1.6) que se tal correspondência existe, então ela é única. Em relação à existência, dado um campo vetorial X ao longo de γ, defina $\frac{DX}{\mathrm{d}t}$, na vizinhança coordenada U, por (1.6). Pela própria construção, o campo em (1.6) satisfaz as propriedades (a), (b) e (c). Se (V, ψ) é outra carta local em M, com $U \cap V \neq \emptyset$, defina $\frac{DX}{\mathrm{d}t}$ em V por (1.6). Note que as duas definições coincidem em $U \cap V$ em virtude da unicidade de $\frac{DX}{\mathrm{d}t}$ em U. Esta definição pode ser estendida a toda variedade M. □

Definição 1.3.2. Um campo vetorial X ao longo de uma curva diferenciável $\gamma : I \to M$ é chamado *paralelo* se $\frac{DX}{\mathrm{d}t} = 0$, para todo $t \in I$.

Proposição 1.3.3. Dados uma curva diferenciável $\gamma : I \to M$ e um vetor tangente $v_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$, com $t_0 \in I$, existe um único campo vetorial paralelo X ao longo de γ tal que $X(t_0) = v_0$.

Demonstração. Suponha, inicialmente, que I seja um intervalo aberto limitado. Assim, $\gamma(I)$ pode ser coberto por uma quantidade finita de vizinhanças coordenadas de M. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\gamma(I)$ está contido na vizinhança coordenada (U, φ), com $\varphi \sim (x_1, \ldots, x_n)$. Seja

$$\varphi(\gamma(t)) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

a expressão local de γ e escreva

$$v_0 = \sum_j a_j^0 X_j(t_0),$$

onde $X_j(t) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\gamma(t))$. Suponha que exista um campo vetorial X em U, que é paralelo ao longo de γ, com $X(t_0) = v_0$. Assim, o campo vetorial

$$X = \sum_j a_j X_j$$

satisfaz

$$\frac{DX}{\mathrm{d}t} = \sum_k \left(\frac{\mathrm{d}a_k}{\mathrm{d}t} + \sum_{i,j} a_j \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \Gamma_{ij}^k \right) X_k = 0,$$

que é equivalente a

$$\frac{\mathrm{d}a_k}{\mathrm{d}t} + \sum_{i,j} a_j \Gamma_{ij}^k \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{1.7}$$

com $1 \leq k \leq n$. Este é um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem nas funções $a_1, \ldots, a_n$, o qual possui uma única solução satisfazendo a condição inicial $a_k(t_0) = a_k^0$. Assim, se X existe, ele é único. No caso geral, podemos cobrir o intervalo I pela união de uma cadeia crescente de intervalos limitados; construa X ao longo de cada intervalo limitado, e a unicidade resulta na solução global. □

Segue da prova da Proposição 1.3.3 que a aplicação que associa a cada vetor $v_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$ o campo vetorial paralelo X ao longo de γ, com $X(t_0) = v_0$, é linear. Avaliando X em outro instante t_1, obtemos uma aplicação linear

$$P_{t_0,t_1}^{\gamma} : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M,$$

chamada *aplicação transporte paralelo ao longo de* γ de t_0 a t_1.

Proposição 1.3.4. Seja $\gamma : I \to M$ uma curva diferenciável. As aplicações de transporte paralelo ao longo de γ satisfazem as seguintes propriedades:

(a) P_{t_0,t_0}^{γ} é a aplicação identidade de $T_{\gamma(t_0)}M$,

(b) $P_{t_1,t_2}^{\gamma} \circ P_{t_0,t_1}^{\gamma} = P_{t_0,t_2}^{\gamma}$,

(c) $\left(P_{t_0,t_1}^{\gamma}\right)^{-1} = P_{t_1,t_0}^{\gamma}$,

(c) $P^{\gamma}_{t_0,t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M$ é uma isometria.

Demonstração. Os itens (a), (b) e (c) seguem diretamente da definição. Em relação ao item (d), se X é um campo vetorial paralelo ao longo de γ, então $\frac{DX}{\mathrm{d}t} = 0$. Assim,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle X(t), X(t)\rangle = 2\left\langle \frac{DX}{\mathrm{d}t}(t), X(t)\right\rangle = 0,$$

logo a norma de X é constante ao longo de γ. □

Exemplo 1.3.5. Seja $X : I \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial ao longo de uma curva diferenciável $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, com

$$X(t) = \sum_i a_i(t)\frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t)).$$

Da equação (1.7), segue que X é paralelo ao longo de γ se, e somente se, as funções coordenadas a_k são constantes, ou seja, X é constante.

Exemplo 1.3.6. Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2_+$ dada por $\gamma(t) = (t, y_0)$, com $y_0 > 0$. Denote por

$$X(t) = a(t)\frac{\partial}{\partial x} + b(t)\frac{\partial}{\partial y}$$

um campo vetorial ao longo de γ, onde $a, b \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$. Então, usando o Exemplo 1.2.7, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{DX}{\mathrm{d}t} &= a'\frac{\partial}{\partial x} + a\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}\frac{\partial}{\partial x} + b'\frac{\partial}{\partial y} + b\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}\frac{\partial}{\partial y} \\
&= a'\frac{\partial}{\partial x} + \frac{a}{y_0}\frac{\partial}{\partial y} + b'\frac{\partial}{\partial y} - \frac{b}{y_0}\frac{\partial}{\partial x} \\
&= \left(a' - \frac{b}{y_0}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(b' + \frac{a}{y_0}\right)\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}$$

A condição para que X seja paralelo é

$$a' = \omega b \quad \text{e} \quad b' = -\omega a,$$

onde $\omega = 1/y_0$. A solução geral deste sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem é

$$\begin{aligned}
a(t) &= a_0 \cos\omega t + b_0 \sin\omega t, \\
b(t) &= -a_0 \sin\omega t + b_0 \cos\omega t,
\end{aligned}$$

onde $a(0) = a_0$ e $b(0) = b_0$. Assim,

$$P^{\gamma}_{0,t}\left(a_0\frac{\partial}{\partial x} + b_0\frac{\partial}{\partial y}\right) = (a_0\cos\omega t + b_0\sin\omega t)\frac{\partial}{\partial x} + (-a_0\sin\omega t + b_0\cos\omega t)\frac{\partial}{\partial y}.$$

1.4 Geodésicas

Seja M^n uma variedade Riemanniana munida de sua conexão de Levi-Civita ∇.

Definição 1.4.1. Uma curva diferenciável $\gamma : I \to M$ é chamada uma *geodésica* em M se $\frac{D}{\mathrm{d}t}(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}) = 0$.

Se $\gamma : I \to M$ é uma geodésica, então

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \right\rangle = 2\left\langle \frac{D}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right), \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \right\rangle = 0,$$

para todo $t \in I$, i.e., o comprimento do vetor tangente $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$ é constante.

Observação 1.4.2. Suporemos sempre que $\|\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\| = const \neq 0$, i.e., excluiremos as geodésicas que se reduzem a pontos. Lembre que o comprimento de arco s de γ, a partir de uma origem fixada, digamos $t = t_0$, é dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \right\| \mathrm{d}t = const(t - t_0),$$

i.e., o parâmetro de uma geodésica é proporcional ao comprimento de arco.

Dados uma curva diferenciável $\gamma : I \to M$ e uma carta local (U, φ) em M, com $\gamma(I) \cap U \neq \emptyset$, seja $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ a expressão local de γ. Então, γ é uma geodésica em M se, e somente se,

$$0 = \frac{D}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}^2 x_k}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} \right) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

que é equivalente a

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_k}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = 0, \quad 1 \leq k \leq n. \tag{1.8}$$

Note que este é um sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares de segunda ordem nas funções $x_1, \ldots, x_n$, para o qual existe um resultado local de existência e unicidade de solução.

Relembremos aqui o seguinte resultado de equações diferenciais.

Teorema 1.4.3 ([12]). *Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem*

$$\gamma'' = F(\gamma, \gamma'),$$

onde $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é uma aplicação diferenciável. Então, dado um ponto* $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$*, existem uma vizinhança* $U \times V$ *de* (x_0, v_0) *e um número* $\epsilon > 0$ *tais que, para qualquer* $(x, v) \in U \times V$*, existe uma única solução* $\gamma_{x,v} : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ *com condições iniciais* $\gamma_{x,v}(0) = x$ *e* $\gamma'_{x,v}(0) = v$*. Além disso, a aplicação* $\phi : U \times V \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$*, definida por*

$$\phi(x, v, t) = \gamma_{x,v}(t),$$

é diferenciável.

Da teoria de equações diferenciais ordinárias, segue que qualquer solução da equação (1.8) é automaticamente diferenciável. O lema seguinte assegura que é possível aumentar a velocidade de uma geodésica diminuindo seu intevalo de definição, ou vice-versa.

Lema 1.4.4 (Homogeneidade). Se $\gamma_{x,v} : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^n$ é uma solução do sistema (1.8) então, para todo $k > 0$, a geodésica $\gamma_{x,kv}(t)$ está definida no intervalo $(-\frac{\delta}{k}, \frac{\delta}{k})$ e vale a relação

$$\gamma_{x,kv}(t) = \gamma_{x,v}(kt).$$

Demonstração. Considere a curva $h : (-\frac{\delta}{k}, \frac{\delta}{k}) \to M$ dada por

$$h(t) = \gamma_{x,v}(kt).$$

Tem-se $h(0) = x$ e $h'(0) = kv$. Além disso, como

$$h'(t) = k\gamma'_{x,v}(kt),$$

temos

$$\frac{D}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right) = \nabla_{\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = k^2 \nabla_{\gamma'_{x,v}(kt)}\gamma'_{x,v}(kt) = 0.$$

Assim, h é uma geodésica que no instante $t = 0$ passa pelo ponto x com velocidade kv. Pela unicidade, temos

$$h(t) = \gamma_{x,v}(kt) = \gamma_{x,kv}(t),$$

como queríamos. $\square$

A proposição seguinte permite tornar o intervalo de definição de uma geodésica uniformemente grande em uma vizinhança de um ponto fixado.

Proposição 1.4.5. Dado um ponto $p \in M$, existem uma vizinhança U de p em M, um número $\epsilon > 0$ e uma aplicação diferenciável $\phi : W \times (-2, 2) \to M$, onde

$$W = \{(q, v) \in TM : q \in U,\ v \in T_qM,\ \|v\| < \epsilon\},$$

tais que $\gamma_{q,v}(t) = \phi(q, v, t)$ é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa pelo ponto q com velocidade v.

Demonstração. Dado uma carta local (U, φ) em M, com $\varphi \sim (x_1, \dots, x_n)$, a aplicação $\overline{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ dada por

$$\overline{\varphi}(p, v) = (\varphi(p), \mathrm{d}\varphi(p) \cdot v),$$

é uma carta local no fibrado tangente TM, onde $\pi : TM \to M$ denota a projeção canônica, $\pi(p, v) = p$. Assim, a equação das geodésicas em M correspondem, via $\overline{\varphi}$, à equações diferenciais de segunda ordem para curvas em $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$, para o qual podemos aplicar o Teorema 1.4.3. De forma mais precisa, qualquer curva diferenciável $\gamma : I \to M$ determina uma curva diferenciável $\overline{\gamma} : I \to TM$ por

$$\overline{\gamma}(t) = \left(\gamma(t), \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t)\right).$$

Se γ é geodésica então, na restrição $TM|_U$, a curva

$$t \in I \mapsto \left(x_1(t), \dots, x_n(t), \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}(t), \dots, \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}(t)\right)$$

satisfaz o sistema

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t} &= y_k \\ \frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}t} &= -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k y_i y_j \end{aligned} \tag{1.9}$$

com $1 \leq k \leq n$, em termos das coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ em $TM|_U$. Assim, o sistema de segunda ordem (1.8) em U é equivalente ao sistema de primeira ordem (1.9) em TU. Deduzimos então que existe uma vizinhança W de 0_p em TM de modo que, para todo $v \in W$, existe uma única geodésica $\gamma_v : (-\delta, \delta) \to M$ tal que $\gamma_v(0) = \pi(v)$ e $\gamma_v'(0) = v$, e $\gamma_v(t)$ é diferenciável em $(v, t) \in W \times (-\delta, \delta)$. Em virtude do Exercício 8, podemos diminuir W e assumir que é da forma

$$W = \{v \in TU : \|v\| < \epsilon'\},$$

para alguma vizinhança U de p em M e algum $\epsilon' > 0$. O Lema 1.4.4 permite que, multiplicando o comprimento de v por $\delta/2$ faz o intervalo de definição de γ_v ser multiplicado por $2/\delta$. Portanto, tomando $\epsilon \leq \frac{\epsilon'\delta}{2}$, a geodésica $\gamma_{q,v}(t)$ está definida para $|t| < 2$ e $\|v\| < \epsilon$. $\square$

Dado $p \in M$, seja $W \subset TM$ um aberto dado pela Proposição 1.4.5. Definimos uma aplicação $\exp : W \to M$ pondo

$$\exp(q, v) = \gamma_{q,v}(1) = \gamma_{q, \frac{v}{\|v\|}}(\|v\|),$$

chamada a *aplicação exponencial* em W.

Observação 1.4.6. Em geral, utilizaremos a restrição da aplicação exp a um aberto de T_pM, ou seja, consideraremos a aplicação

$$\exp_p : B_\epsilon(0) \subset T_pM \to M$$

definida por

$$\exp_p(v) = \exp(p, v).$$

Note que $\exp_p(0) = p$. Geometricamente, $\exp_q(v)$ é o ponto de M obtido percorrendo-se um comprimento igual a $\|v\|$, a partir de q, sobre a geodésica que passa por q com velocidade $v/\|v\|$.

Proposição 1.4.7. Dado um ponto $p \in M$, valem as seguintes propriedades:

(a) A aplicação exponencial $\exp_p$ transforma uma vizinhança V de 0_p em T_pM difeomorficamente sobre uma vizinhança U_p de p em M.

(b) Existe um número $\epsilon > 0$ tal que, para cada $q \in U_p$, existe um único vertor $v \in T_qM$, com $\|v\| < \epsilon$, de modo que $\exp_p(v) = q$.

Demonstração. Calculemos a diferencial $\mathrm{d}\exp_p(0_p) : T_pM \to T_pM$ da aplicação $\exp_p$, onde estamos identificando $T_{0_p}(T_pM) \simeq T_pM$. Lembrando que $\exp_p(tv) = \gamma_{p,tv}(1) = \gamma_{p,v}(t)$, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\exp_p(0_p) \cdot v &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\exp_p(tv)\right)|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma_{p,tv}(1)\right)|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma_{p,v}(t)\right)|_{t=0} = \gamma'_{p,v}(0) = v. \end{aligned}$$

Assim, $\mathrm{d}\exp_p(0_p)$ é a aplicação identidade em T_pM, e o resultado segue do teorema da aplicação inversa. $\square$

A vizinhança U_p de p dada pela Proposição 1.4.7 é usualmente chamada de *vizinhança normal* de p. Assim, qualquer ponto em uma vizinhança normal de p pode ser ligado a p por uma única geodésica naquela vizinhança.

Observação 1.4.8. Decorre da Proposição 1.4.7 que a aplicação exponencial $\exp_p$ é uma carta local natural para a variedade Riemanniana M, em torno de p. Ou seja, $\exp_p$ é uma carta local para M determinada pela geometria de M, com a propriedade de que as retas radiais, saindo de $0_p \in T_pM$, são transformadas em geodésicas de M, partindo de p.

O que faremos agora é melhorar a Proposição 1.4.7 no sentido de conectar quaisquer dois pontos em uma vizinhança de p por uma geodésica. Comecemos com o seguinte lema auxiliar.

Lema 1.4.9. Fixado um ponto $p \in M$, a aplicação $\phi : W \to M \times M$ dada por

$$\phi(q, v) = (q, \exp_q(v))$$

é um difeomorfismo local de uma vizinhança de 0_p em TM sobre uma vizinhança de $(p, p) \in M \times M$, onde W é o aberto dado pela Proposição 1.4.5.

Demonstração. Lembre que o aberto W é da forma

$$W = \{(q, v) \in TM : q \in U,\ v \in T_qM,\ \|v\| < \epsilon\},$$

onde U é uma vizinhança de p em M, a qual podemos supor que é domínio de uma carta local (U, φ) em M, com $\varphi \sim (x_1, \ldots, x_n)$. Considere as correspondentes coordenadas $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ em $TU \subset TM$. Observe que $\varphi \times \varphi$ é uma carta local em $M \times M$, com $\varphi \times \varphi \sim (x_1, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_n)$. A matriz que representa a diferencial $\mathrm{d}\phi(p, 0)$ nessas coordenadas é da forma

$$\mathrm{d}\phi(p, 0) = \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

onde a primeira linha corresponde às derivada de ϕ em relação às coordenadas x_i, e a segunda linha corresponde às derivadas de ϕ em relação às coordenadas y_j. Essa matriz é inversível, e o resultado segue do teorema da aplicação inversa. $\square$

Proposição 1.4.10. Dado um ponto $p \in M$, existem uma vizinhança U de p em M e um número $\epsilon > 0$ tais que:

(a) Dados $x, y \in U$, existe um único vetor $v \in T_xM$, com $\|v\| < \epsilon$, tal que $\exp_x(v) = y$.

(b) A aplicação $\psi : U \times U \to M$ dada por

$$\psi(x, y) = \exp_x(v),$$

onde v é o vetor dado no item (a), é diferenciável.

(c) Para todo $x \in U$, a aplicação exponencial $\exp_x$ é um difeomorfismo da bola aberta $B(0_x; \epsilon)$ sobre uma vizinhança normal de x contendo U.

Demonstração. (a) Seja W uma vizinhança de 0_p em TM tal que $\phi(q, v) = (q, \exp_q(v))$ seja um difeomorfismo de W sobre uma vizinhança de (p, p) em $M \times M$, como no Lema 1.4.9. Diminuindo W, se necessário, podemos assumir que

$$W = \bigcup_{x \in V} B(0_x; \epsilon),$$

para alguma vizinhança V de p em M e algum $\epsilon > 0$. Seja U uma vizinhança de p em M tal que $U \times U \subset \phi(W)$. Então, dado $(x, y) \in U \times U$, existe um único $v \in W$ tal que $\phi(v) = (x, y)$, ou seja, existe um único $v \in B(0_x; \epsilon)$ tal que $\exp_x(v) = y$.

(b) Podemos escrever

$$\psi(x, y) = \exp_x(v) = \exp_x(\phi^{-1}(x, y)),$$

mostrando que ψ é diferenciável.

(c) Como $B(0_x; \epsilon) \subset W$, a aplicação ϕ é um difeomorfismo da bola aberta $B(0_x; \epsilon)$ sobre sua imagem. Porém, fixado $x \in U$, tem-se

$$\phi(v) = (x, \exp_x(v)),$$

para todo $x \in B(0_x; \epsilon)$. $\square$

Exemplo 1.4.11. A equação das geodésicas (1.8) em $\mathbb{R}^n$ é dada por

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_k}{\mathrm{d}t^2} = 0, \quad 1 \leq k \leq n,$$

ou seja, geodésicas em $\mathbb{R}^n$ são retas. Assim,

$$\exp_p(v) = p + v,$$

quaisquer que sejam $p \in \mathbb{R}^n$ e $v \in T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$. Disso decorre que no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ a aplicação exponencial é a própria aplicação identidade.

Observação 1.4.12. Determinemos as geodésicas da esfera $\mathbb{S}^n$. Dados $p \in \mathbb{S}^n$ e $v \in T_p\mathbb{S}^n$, podemos supor que $v \neq 0$ pois, do contrário, a geodésica γ de $\mathbb{S}^n$ satisfazendo $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$ seria uma curva constante. Como p e v são vetores ortogonais em $\mathbb{R}^{n+1}$, eles geram um subespaço 2-dimensional E de $\mathbb{R}^{n+1}$. Se $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma reflexão em torno de E, então f é uma transformação ortogonal que deixa $\mathbb{S}^n$ invariante. Como f é isometria em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathbb{S}^n$ tem a métrica induzida de $\mathbb{R}^{n+1}$, f restringe-se a uma isometria de $\mathbb{S}^n$ (cf. Exercício 1.1.3). Como isometria transforma geodésicas em geodésicas, a curva $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ é uma geodésica de $\mathbb{S}^n$. Além disso, como f fixa pontualmente o subespaço E, as condições iniciais para $\tilde{\gamma}$ são

$$\tilde{\gamma}(0) = f(\gamma(0)) = f(p) = p \quad \text{e} \quad \tilde{\gamma}'(0) = f(\gamma'(0)) = f(v) = v,$$

que são as mesmas condições iniciais da geodésica γ. Da unicidade das geodésicas, temos que $\tilde{\gamma} = \gamma$, ou seja, $f(\gamma(t)) = \gamma(t)$, para todo $t \in \mathrm{Dom}(\gamma)$. Disso decorre que $\gamma \subset E$ e deve coincidir com o grande círculo $\mathbb{S}^n \cap E$, parametrizado com velocidade constante em seu domínio de definição. Este argumento mostra que os grandes círculos são, localmente, geodésicas, logo são geodésicas em $\mathbb{S}^n$. Em particular, as geodésicas de $\mathbb{S}^n$ parametrizadas pelo comprimento de arco são periódicas de período 2π, e vale a fórmula

$$\exp_p(v) = \cos(\|v\|)p + \sin(\|v\|)\frac{v}{\|v\|},$$

para todo $v \in T_p\mathbb{S}^n$, com $v \neq 0$.

Exemplo 1.4.13. Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^2_+$ uma curva diferenciável, com $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Então,

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = x'\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y}$$

e

$$\frac{D}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right) = x''\frac{\partial}{\partial x} + x'\frac{D}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + y''\frac{\partial}{\partial y} + y'\frac{D}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Usando o Exemplo 1.2.7, as derivadas covariantes dos campos coordenados são dadas por

$$\frac{D}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \nabla_{\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}}\frac{\partial}{\partial x} = x'\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}\frac{\partial}{\partial x} + y'\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{y'}{y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x'}{y}\frac{\partial}{\partial y}$$

e

$$\frac{D}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \nabla_{\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}}\frac{\partial}{\partial y} = x'\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}\frac{\partial}{\partial y} + y'\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{x'}{y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y'}{y}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Assim,

$$\frac{D}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right) = \left(x'' - 2\frac{x'y'}{y}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(y'' + \frac{(x')^2 - (y')^2}{y}\right)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Portanto, as equações das geodésicas em $\mathbb{R}^2_+$ são dadas por

$$\begin{aligned} x'' - 2\frac{x'y'}{y} &= 0, \\ y'' + \frac{(x')^2 - (y')^2}{y} &= 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

1.5 Grupos de Lie

Definição 1.5.1. Um *grupo de Lie* é um grupo G, munido de uma estrutura de variedade diferenciável, de modo que a aplicação

$$(g, h) \in G \times G \mapsto gh \in G$$

seja diferenciável.

A primeira consequência da Definição 1.5.1 é que a *translação à esquerda* $L_g : G \to G$, dada por $L_g(h) = gh$, e a *translação à direita* $R_g : G \to G$, dada por $R_g(h) = hg$, são difeomorfismos, qualquer que seja o elemento $g \in G$. Neste caso, tem-se que $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ e $(R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$.

O resultado seguinte garante que, a menos de isometrias, a maioria das variedades Riemannianas homogênas tridimensionais são grupos de Lie.

Teorema 1.5.2 ([8])**.** *Exceto para a variedade produto* $\mathbb{S}^2(k)\times\mathbb{R}$*, onde* $\mathbb{S}^2(k)$ *denota a esfera de curvatura seccional constante igual a* k*, toda variedade Riemanniana homogênea, simplesmente conexa, de dimensão* 3*, é isométrica a um grupo de Lie métrico.*

Definição 1.5.3. Um campo vetorial X em G é dito ser *invariante à esquerda* se $\mathrm{d}L_g(x) \cdot X(x) = X(gx)$, para quaisquer $g, x \in G$.

Isso significa que $\mathrm{d}L_g \circ X = X \circ L_g$, para todo $g \in G$. Podemos definir, de forma análoga, campos *invariante à direita*.

Denotemos por $\mathfrak{g}$ o conjunto dos campos vetoriais invariantes à esquerda em G. Este conjunto, com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar, é um espaço vetorial real. Se $e \in G$ denota o elemento identidade, a aplicação

$$X \in \mathfrak{g} \mapsto X(e) \in T_eG$$

define um isomorfismo linear entre $\mathfrak{g}$ e T_eG, pois qualquer campo vetorial invariante à esquerda é completamente determinado pelo seu valor no elemento identidade de G:

$$X(g) = X(g \cdot e) = \mathrm{d}L_g(e) \cdot X(e), \tag{1.11}$$

qualquer que seja $g \in G$. Disso decorre, em particular, que $\dim \mathfrak{g} = \dim G$.

Observação 1.5.4. Um campo vetorial invariante à esquerda X em G é sempre diferenciável. De fato, se f é uma função diferenciável numa vizinhança de $e \in G$ e $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ é uma curva diferenciável com $\gamma(0) = e$ e $\gamma'(0) = X(e)$, então o valor de X em f é dado por

$$\begin{aligned} X(g)(f) &= \mathrm{d}L_g(e) \cdot X(e)(f) = X(e)(f \circ L_g) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(g \cdot \gamma(t)\big)|_{t=0}, \end{aligned}$$

que é uma função diferenciável.

Seja $X, Y \in \mathfrak{g}$. Dados $g \in G$ e $f \in \mathrm{C}^\infty(G)$, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}L_g[X,Y](f) &= [X,Y](f \circ L_g) = X(f \circ L_g)Y - Y(f \circ L_g)X \\ &= (\mathrm{d}L_g \circ X)(f)Y - (\mathrm{d}L_g \circ X)(f)X \\ &= (X \circ L_g)(f)Y - (Y \circ L_g)(f)X \\ &= X(f \circ L_g)Y - Y(f \circ L_g)X \\ &= (XY - YX)(f \circ L_g) \\ &= [X,Y](f) \circ L_g. \end{aligned}$$

Isso mostra que o colchete de campos invariantes à esquerda também é invariante à esquerda. Assim, dados $X_e, Y_e \in T_eG$, definimos

$$[X_e, Y_e] = [X, Y](e),$$

onde X e Y são os campos vetoriais invariantes à esquerda determinados pelos vetores $X_e, Y_e \in T_eG$, como em (1.11). Com esta operação, o espaço tangente T_eG é chamado a *álgebra de Lie* de G e será denotada por $\mathfrak{g}$. Assim, os elementos da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ podem ser pensados, indiferentemente, como vetores de T_eG ou campos vetoriais de G que são invariantes à esquerda.

Definição 1.5.5. Uma métrica Riemanniana em G é dita *invariante à esquerda* se

$$\langle v, w\rangle = \langle \mathrm{d}L_g(x)\cdot v, \mathrm{d}L_g(x)\cdot w\rangle,$$

para quaisquer $g, x \in G$ e $v, w \in T_xG$.

De forma análoga definimos métrica Riemanniana *invariante à direita.* Uma métrica Riemanniana invariante à esquerda e à direita é chamada *bi-invariante.* Se $\langle , \rangle_e$ é um produto interno em $\mathfrak{g} \simeq T_eG$, podemos introduzir uma métrica invariante à esquerda em G pondo

$$\langle v, w\rangle_g = \langle \mathrm{d}L_{g^{-1}}(g)\cdot v, \mathrm{d}L_{g^{-1}}(g)\cdot w\rangle_e,$$

quaisquer que sejam $g \in G$ e $v, w \in T_gG$. Como L_g depende diferenciavelmente de g, isso fornece, de fato, uma métrica Riemanniana invariante à esquerda em G.

Proposição 1.5.6. Seja G um grupo de Lie que admite uma métrica bi-invariante $\langle , \rangle$. Então, vale a seguinte relação:

$$\langle [X, Y], Z\rangle - \langle X, [Y, Z]\rangle = 0,$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Demonstração. Considere a representação adjunta $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ de G dada por $\mathrm{Ad}(g) = \mathrm{d}L_g(g^{-1}) \circ \mathrm{d}R_{g^{-1}}(e)$. Temos que

$$\mathrm{Ad}(g)X = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(g\exp(tX)g^{-1}\big)|_{t=0},$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$ e, como a métrica é bi-invariante, tem-se

$$\langle \mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y\rangle = \langle X, Y\rangle,$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{g}$. A diferencial dAd define a represetação adjunta ad de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$:

$$X \in \mathfrak{g} \mapsto \mathrm{ad}_X = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathrm{Ad}(\exp(tX))\big)|_{t=0} \in \mathrm{gl}(\mathfrak{g}),$$

que satisfaz $\mathrm{ad}_X Y = [X, Y]$, para todo $Y \in \mathfrak{g}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle [X, Y], Z\rangle &= \langle \mathrm{ad}_X Y, Z\rangle = \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathrm{Ad}(\exp(tX))Y\big)|_{t=0}, Z\right\rangle \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \mathrm{Ad}(\exp(tX))Y, Z\rangle|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle Y, \mathrm{Ad}(\exp(-tX))Z\rangle|_{t=0} \\
&= \langle Y, -\mathrm{ad}_X Z\rangle = -\langle Y, [X, Z]\rangle,
\end{aligned}$$

como queríamos. $\square$

Corolário 1.5.7. Se um grupo de Lie G admite uma métrica bi-invariante, então a conexão de Levi-Civita ∇ de G é dada por

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y],$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Demonstração. Observe, inicialmente, que dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, a função $\langle X, Y\rangle$ é constante em G. Disso decorre, em particular, que $Z\langle X, Y\rangle = 0$, $X\langle Y, Z\rangle = 0$ e $Y\langle X, Z\rangle = 0$, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Portanto, segue da fórmula de Koszul (1.5) e da Proposição 1.5.6 que

$$\langle \nabla_Y X, Z\rangle = -\frac{1}{2}\langle [X, Y], Z\rangle = \frac{1}{2}\langle [Y, X], Z\rangle,$$

como queríamos. $\square$

Corolário 1.5.8. Se um grupo de Lie G está munido de uma métrica bi-invariante, então os subgrupos a 1-parâmetro de um campo vetorial $X \in \mathfrak{g}$ são geodésicas em G.

Demonstração. Pelo Corolário 1.5.7, segue que $\nabla_X X = 0$, para todo $X \in \mathfrak{g}$. Assim, se $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ é uma curva integral de X, ou seja, $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, então

$$\frac{D}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right) = \nabla_{\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = 0,$$

como queríamos. Observe que, da unicidade, as geodésicas de G são subgrupos a 1-parâmetro. $\square$

1.6 A estrutura de espaço métrico

O objetivo dessa seção é descrever a métrica Riemanniana em coordenadas normais. Mais precisamente, provaremos o Lema de Gauss que será usado para introduzir uma estrutura de espaço métrico na variedade Riemanniana. Isso possibilitará estudar distâncias e curvas que minimizam distâncias.

Fixado $p \in M$, sabemos que existem vizinhanças W_p de 0_p em T_pM e U_p de p em M de modo que $\exp_p : W_p \to U_p$ é um difeomorfismo. Para cada $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(0_o) \subset W_p$, a esfera $S_\epsilon(p) = \exp_p(S_\epsilon(0_p))$ é chamada de *esfera geodésica* (ou *esfera normal*), e para cada direção radial $v \in T_pM$, para o qual $\exp_p(v)$ está definido, a geodésica $\exp_p(tv)$ é usualmente chamada de *geodésica radial* determinada por v.

O resultado seguinte nos diz que a aplicação exponencial $\exp_p$ é uma isometria radial, no sentido que ela preserva o produto interno desde que um dos vetores aponte na direção radial.

Lema 1.6.1 (Gauss)**.** Fixado um ponto $p \in M$, considere um vetor $v \in T_pM$ para o qual $\exp_p(v)$ esteja definido. Então, qualquer que seja o vetor $w \in T_v(T_pM) \simeq T_pM$, tem-se

$$\langle \mathrm{d}\exp_p(v) \cdot v, \mathrm{d}\exp_p(v) \cdot w \rangle = \langle v, w \rangle. \tag{1.12}$$

Demonstração. Escrevamos w como sendo $w = w^T + w^\perp$, onde w^T é paralelo a v e $w^\perp$ é ortogonal a v. Note, inicialmente, que a curva

$$t \mapsto \exp_p(tv) = \gamma_{p,v}(t)$$

é uma geodésica. Isso significa que o vetor velocidade dessa curva tem comprimento constante, i.e.,

$$t \mapsto \left\langle \mathrm{d}\exp_p(tv) \cdot v, \mathrm{d}\exp_p(tv) \cdot v \right\rangle = const.$$

Assim, o valor assumido por essa função em $t = 1$ é igual ao valor assumido em $t = 0$, para o qual sabemos que $\mathrm{d}\exp_p(0_p) \cdot v = v$. Isso prova (1.12) quando $w = w^T$. Podemos então supor que $w = w^\perp \neq 0$. Como w é ortogonal a v, w é o vetor velocidade de alguma curva tangente à esfera, ou seja, existe uma curva diferenciável $s \mapsto v(s)$, com $-\epsilon < s < \epsilon$, tal que $v(0) = v$, $v'(0) = w$ e $\|v(s)\| = const$ ($v(s)$ contido na esfera). Agora, por cada ponto dessa curva, considere o raio geodésico que sai de 0_p e atinge esse ponto. Em outras palavras, considere a aplicação

$$f(t, s) = \exp_p(tv(s)),$$

com $0 \leq t \leq 1$ e $-\epsilon < s < \epsilon$. Observe que as curvas $t \mapsto f(t, s_0)$ são geodésicas. Além disso, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t}(t, s) &= \mathrm{d}\exp_p(tv(s)) \cdot v(s), \\
\frac{\partial f}{\partial s}(t, s) &= t\mathrm{d}\exp_p(tv(s)) \cdot v'(s).
\end{aligned}$$

Isso implica que

$$\langle \mathrm{d}\exp_p(v)\cdot v, \mathrm{d}\exp_p(v)\cdot w\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}(1,0), \frac{\partial f}{\partial s}(1,0)\right\rangle.$$

Afirmamos agora que a função

$$t \mapsto \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}(t,0), \frac{\partial f}{\partial s}(t,0)\right\rangle$$

é constante. De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right\rangle &= \left\langle \frac{D}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right), \frac{\partial f}{\partial s}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{D}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)\right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{D}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\|v(s)\|^2 = 0,
\end{aligned}$$

onde, na segunda igualdade, usamos a simetria da derivada covariante (cf. Exercício 1.6.2). Portanto,

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}(1,0), \frac{\partial f}{\partial s}(1,0)\right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}(0,0), \frac{\partial f}{\partial s}(0,0)\right\rangle = 0,$$

pois $\frac{\partial f}{\partial s}(0,0) = 0$, e isso finaliza a demonstração. □

Decorre então do lema de Gauss que as geodésicas radiais, partindo de p, são sempre ortogonais às esferas geodésicas dentradas em p.

Proposição 1.6.2. Dado um ponto $p \in M$, seja $\epsilon > 0$ de modo que o aberto $U = \exp_p(B_\epsilon(0_p))$ seja uma vizinhança normal de p. Então, para qualquer $x \in U$, existe uma única geodésica $\gamma : [a,b] \to M$ de comprimento menor do que ϵ ligando p e x. Além disso, se $\alpha : [a,b] \to M$ é outra curva diferenciável por partes, ligando p e x, então $l(\gamma) \leq l(\alpha)$, e vale a igualdade se, e somente se, $\gamma([a,b]) = \alpha([a,b])$.

Demonstração. Pela Proposição 1.4.10, sabemos que existe um único vetor $v \in T_pM$, com $\|v\| < \epsilon$, tal que $\exp_p(v) = x$. Assim, se γ é a geodésica

$$\gamma_{p,v}(t) = \exp_p(tv), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

tem-se que γ é geodésica em M, ligando p e x, com comprimento menor do que ϵ. Considere agora outra curva diferenciável por partes α ligando p

e x. Sem perda de generalidade, podemos assumir que α está definida no intervalo $[0,1]$ e que $\alpha(t) \neq p$, para todo $t > 0$ pois, do contrário, abandonaríamos o intervalo $[0, t_0]$, com $t_0 > 0$ satisfazendo $\alpha(t_0) = p$. Existem duas possibilidades:

Caso 1. Se $\alpha([0,1]) \subset U$, e como $\exp_p$ é um difeomorfismo em U, a curva $\alpha(t)$ pode ser escrita, univocamente, como

$$\alpha(t) = \exp_p\big(r(t) \cdot v(t)\big) = f(r(t), t), \quad t > 0,$$

onde $v : [0,1] \to T_pM$ é uma curva diferenciável, satisfazendo $\|v(t)\| = 1$, e $r : (0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função positiva, diferenciável por partes. Temos:

$$\alpha'(t) = r'(t)\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Em virtude do lema de Gauss, temos

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\|^2 &= (r'(t))^2 \left\|\frac{\partial f}{\partial r}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2 \\ &\geq (r'(t))^2 \left\|\frac{\partial f}{\partial r}\right\|^2 = (r'(t))^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} l(\alpha) &= \int_0^1 \|\alpha'(t)\| \mathrm{d}t \geq \int_0^1 |r'(t)| \mathrm{d}t \geq \left| \int_0^1 r'(t) \mathrm{d}t \right| \\ &= \left| r(1) - \lim_{t \to 0} r(t) \right| = l(\gamma). \end{aligned}$$

Caso 2. Caso $\alpha([0,1])$ não esteja contido em U, seja

$$t_0 = \inf\{t : \alpha(t) \in \partial U\}.$$

Novamente, usando o lema de Gauss, obtemos:

$$\begin{aligned} l(\alpha) &\geq l\left(\alpha|_{[0,t_0]}\right) \geq \int_0^{t_0} |r'(t) \mathrm{d}t| = \left| r(t_0) - \lim_{t \to 0} r(t) \right| \\ &\geq \epsilon \geq l(\gamma). \end{aligned}$$

Em qualquer caso, obtemos $l(\gamma) \leq l(\alpha)$. Se $l(\gamma) = l(\alpha)$, então estamos na situação em que $\alpha([0,1]) \subset U$, logo $\left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\| = 0$, o que implica $v(t) = const$, de modo que $\alpha(t)$ é uma geodésica radial, a menos de reparametrização. $\square$

Dados dois pontos $x, y \in M$, denotemos por $C_{x,y}$ o conjunto de todas as curvas diferenciáveis por partes ligando x e y. Definimos então

$$d(x,y) = \inf\{l(\gamma) : \gamma \in C_{x,y}\}. \tag{1.13}$$

Teorema 1.6.3. *Se M é conexa, a função d em* (1.13) *define uma distância em M que induz a topologia da estrutura diferenciável de M.*

Demonstração. Observe, inicialmente, que a distância entre dois pontos é sempre finita. De fato, o conjunto dos pontos de M que podem ser ligados a um dado ponto, por uma curva diferenciável por partes, é aberto. Isso resulta numa partição de M por conjuntos abertos que, em virtude da conexidade de M, reduz-se a um único aberto. Observe agora que $d(x,y) = d(y,x)$, pois toda curva pode ser reparametrizada no sentido contrário. A desigualdade triangular $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ também vale pela justaposição de curvas, e $d(x,x) = 0$ vale usando-se uma curva constante. A fim de provar que d é uma distância em M, resta mostrar que $d(x,y) > 0$ para $x \neq y$. Escolha $\epsilon > 0$ tal que $y \notin U$ e $U = \exp_x(B_\epsilon(0_x))$ é uma vizinhança normal de x, e seja $V = \exp_x(B_{\epsilon/2}(0_x))$. Se $\gamma \in C_{x,y}$ e $t_0 = \inf\{t : \gamma(t) \notin V\}$, então

$$l(\gamma) \geq l\left(\gamma|_{[0,t_0]}\right) \geq \frac{\epsilon}{2} > 0,$$

onde a segunda desigualdade acima é consequência da Proposição 1.6.2. Disso decorre que $d(x,x) > 0$. Em relação à topologia de M, observe que a Proposição 1.6.2 implica que, na vizinhança normal U de x, mais precisamente com $0 < r < \epsilon$, as esferas

$$S(x;r) = \{z \in M : d(z,x) = r\}$$

coincidem com as esferas geodésicas

$$S_r(x) = \{\exp_x(v) : \|v\| = r\}.$$

Em particular, as bolas abertas

$$B(x;r) = \{z \in M : d(z,x) < r\} \tag{1.14}$$

coincidem com as bolas geodésicas

$$B_r(x) = \{\exp_x(v) : \|v\| < r\}. \tag{1.15}$$

Como as bolas abertas em (1.14) constituem um sistema fundamental de vizinhanças de x para a topologia de (M, d), e as bolas abertas em (1.14) constituem um sistema fundamental de vizinhanças de x para a topologia de M, como variedade diferenciável, e x é arbitrário, concluimos que a topologia induzida por d coincide com a topologia original de M, induzida da estrutura diferenciável. $\square$

A respeito das vizinhanças totalmente normais, temos o seguinte resultado.

Corolário 1.6.4. Dado um ponto $p \in M$, considere um número $\epsilon > 0$ tal que $U = \exp_p(B_\epsilon(0_p))$ seja uma vizinhança totalmente normal de p, como na Proposição 1.4.10. Então, para quaisquer $x, y \in U$, existe uma única geodésica γ, de comprimento menor que ϵ, ligando x e y. Além disso, o comprimento de γ é igual a distância entre x e y, e γ é a única curva diferenciável por partes em M com esta propriedade, a menos de reparametrização.

Demonstração. As afirmações seguem diretamente das Proposições 1.4.10 e 1.6.2. $\square$

Finalizaremos esta seção discutindo a propriedade de minimização das geodésicas. Uma curva diferenciável por partes $\gamma : [a, b] \to M$ é dita *minimizante* se $l(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$.

Lema 1.6.5. Seja $\gamma : [a, b] \to M$ uma curva minimizante. Então, a restrição $\gamma|_{[c,d]}$ a qualquer subintervalo $[c, d] \subset [a, b]$ também é minimizante.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que γ não seja minimizante em $[c, d]$. Isso significa que existe uma curva diferenciável por partes α, ligando $\gamma(c)$ e $\gamma(d)$, com comprimento menor da curva $\gamma|_{[c,d]}$. Considere a curva diferenciável por partes $c : [a, b] \to M$ construída trocando-se $\gamma|_{[c,d]}$ por α, e dada por

$$c(t) = \begin{cases} \gamma(t), & \text{se} \quad t \in [a, c] \\ \alpha(t), & \text{se} \quad t \in [c, d] \\ \gamma(t), & \text{se} \quad t \in [d, b] \end{cases} .$$

Assim, c é uma curva diferenciável por partes ligando $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$, cujo comprimento é menor da curva γ, o que é uma contradição. Assim, γ é minimizante em $[c, d]$. $\square$

O teorema seguinte caracteriza as geodésicas como as curvas que são, localmente, minimizantes.

Teorema 1.6.6. *Uma curva diferenciável por partes $\gamma : [a, b] \to M$ é uma geodésica a menos de reparametrização se, e somente se, todo arco suficientemente pequeno de γ é uma curva minimizante.*

Demonstração. Todo arco suficientemente pequeno de γ está contido em uma vizinhança totalmente normal $U = \exp_p(B_\epsilon(0_p))$ de algum ponto $p \in M$. Porém, o comprimento de uma curva em U, de comprimento menor que ϵ, realiza a distância entre as extremidades da curva se, e somente se, a curva é uma geodésica, a menos de reparametrização, em virtude do Corolário 1.6.4. Como a propriedade de ser geodésica é um conceito local, isso finaliza a demonstração. $\square$

Observe que, como geodésicas são curvas diferenciáveis, segue do Lema 1.6.5 e do Teorema 1.6.6 que uma curva minimizante deve ser, necessariamente, diferenciável.

1.7 Exercícios

1.1

1. Sejam $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ o *catenoide*, que é a superfície gerada pela rotação em torno do eixo z da curva $x = \cosh z$, e $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^3$ o *helicoide*, que é a superfície gerada por retas paralelas ao plano xy que interceptam o eixo z e a hélice $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$.

(a) Mostre que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{H}$ são superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$ escrevendo parametrizações naturais.

(b) Seja $\langle , \rangle = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ a métrica usual de $\mathbb{R}^3$. Mostre que $(\mathcal{C}, \langle , \rangle|_{\mathcal{C}})$ e $(\mathcal{H}, \langle , \rangle|_{\mathcal{H}})$ são superfícies localmente isométricas.

2. Usando partição da unidade, prove que toda variedade diferenciável admite métrica Riemanniana.

3. Prove que as isometrias da esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, munida da métrica induzida, são as restrições das aplicações lineares ortogonais.

1.2

1. Seja $(M, \langle , \rangle)$ uma variedade Riemanniana. Uma conexão afim ∇ em M é dita ser *compatível* com a métrica $\langle , \rangle$ se, para toda curva diferenciável $\gamma : I \to M$ e quaisquer pares de campos vetoriais paralelos X e Y ao longo de γ, tivermos $\langle X, Y \rangle = const.$

(a) Prove que ∇ é compatível com a métrica $\langle , \rangle$ se, e somente se, para todo par X e Y de campos vetoriais ao longo da curva γ tem-se

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle X, Y \rangle = \left\langle \frac{DX}{\mathrm{d}t}, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{DY}{\mathrm{d}t} \right\rangle, \quad t \in I.$$

(b) Conclua, daí, que ∇ é compatível com a métrica se, e somente se,

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

1.3

1. Sejam X e Y campos vetoriais numa variedade diferenciável M, munida de uma conexão afim ∇. Dados um ponto $p \in M$ e um vetor $v \in T_pM$, considere uma curva diferenciável $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = X(p)$. Prove que

$$(\nabla_X Y)(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(P^{\gamma}_{t,t_0}(Y(\gamma(t))) \right) |_{t=0},$$

onde $P^{\gamma}_{t,0}$ denota o transporte paralelo ao longo de γ, de t a 0.

1.4

1. Sejam $f : M \to N$ uma isometria entre variedades Riemannianas e $\gamma : I \to M$ uma geodésica em M. Prove que a curva $f \circ \gamma : I \to N$ é uma geodésica em N.

2. Sejam $f : M \to M$ uma isometria, onde M é uma variedade Riemanniana conexa, e $p \in M$ tal que $f(p) = p$ e $\mathrm{d}f(p) = id$. Mostre que $f = id_M$.

3. Um *campo de Killing* numa variedade Riemanniana M é um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ cujo fluxo local $\{\varphi_t\}$ consiste de isometrias de M. Prove que as seguintes condições são equivalentes:

(a) A derivada de Lie da métrica é identicamente nula, i.e., $L_X\langle , \rangle = 0$.

(b) $X\langle Y, Z\rangle = \langle [X, Y], Z\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle$, para quaisquer $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

(c) $\langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z X\rangle = 0$, para quaisquer $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Esta condição implica, em particular, que todo campo vetorial paralelo é um campo de Killing.

4. Prove os seguintes fatos a respeito de um campo de Killing $X \in \mathfrak{X}(M)$:

(a) Dado um ponto $p \in M$, considere uma vizinhança normal U de p em M para o qual p é o único ponto de U que satisfaz $X(p) = 0$. Então, no aberto U, X é tangente às esferas geodésicas centradas em p.

(b) Dado um ponto $p \in M$, com $X(p) \neq 0$, então existe uma carta local (U, φ) em M, com $p \in U$ e $\varphi \sim (x_1, \ldots, x_n)$, de modo que os coeficientes g_{ij} da métrica nesta carta local não dependem de x_n.

(c) Considere um ponto $p \in M$ tal que $X(p) = 0$ e $\nabla_v X = 0$, para todo $v \in T_pM$. Se M é conexa então $X \equiv 0$.

(d) Se $p \in M$ é um ponto crítico da função $f = \|X\|^2$, então a curva integral de X que passa por p é uma geodésica em M.

5. Dados um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ e uma isometria $f : M \to N$, considere o campo vetorial $Y \in \mathfrak{X}(N)$ definido por $Y(f(p)) = \mathrm{d}f(p) \cdot X(p)$, para todo $p \in M$. Prove que Y é um campo de Killing se, e somente se, X também o for.

6. Dados uma variedade Riemanniana M^n e um ponto $p \in M$, mostre que existe uma vizinhança U de p em M e n campos vetoriais $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(U)$, ortonormais em cada ponto de U, tais que, em p, tem-se $(\nabla_{X_i} X_j)(p) = 0$. Esta coleção de campos vetoriais é chamada de *referencial geodésico* em p.

7. Dados um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ e uma função $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$, definimos a *divergência* de X como a função $\mathrm{div}X : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathrm{div}X(p) = \text{traço}\,\big\{Y(p) \mapsto (\nabla_Y X)(p)\big\},$$

$p \in M$, e o *gradiente* de f como o campo vetorial $\mathrm{grad}f$ em M definido por

$$\langle \mathrm{grad}f(p), v\rangle = \mathrm{d}f(p) \cdot v,$$

para quaisquer $p \in M$ e $v \in T_pM$.

(a) Se $X_1, \ldots, X_n$ é um referencial geodésico em $p \in M$, mostre que

$$\mathrm{grad}f(p) = \sum_{i=1}^n X_i(f)X \quad \text{e} \quad \mathrm{div}X(p) = \sum_{i=1}^n X_i(f_i)(p),$$

onde $X = \sum_i f_i X_i$.

(b) Suponha que $M = \mathbb{R}^n$, com as coordenadas usuais $(x_1, \ldots, x_n)$. Mostre que

$$\mathrm{grad}f(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad \mathrm{div}X(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

onde $X = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

8. Fixe um ponto $p \in M$. Prove que toda vizinhança W de 0_p em TM contém uma vizinhança da forma

$$\bigcup_{x \in U} B(0_x; \epsilon) = \{v \in TM|_U : \sqrt{\langle v, v\rangle} < \epsilon\},$$

para alguma vizinhança U de p em M e algum $\epsilon > 0$.

9. Mostre que as soluções do sistema (1.10) são da forma

$$\gamma(t) = (x_0, y_0 e^{kt}),$$

onde $y_0 > 0$ e $k \in \mathbb{R}$, parametrizando as retas verticais, ou

$$\gamma(t) = (x_0 + r \tanh t, r \operatorname{sech}\, t),$$

onde $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, que parametrizam o semi-círculo de centro $(x_0, 0)$ e raio $r > 0$ em $\mathbb{R}^2_+$.

1.5

1. Prove que todo grupo de Lie compacto e conexo admite uma métrica bi-invariante.

2. Seja G um grupo de Lie munido de uma métrica bi-invariante. Mostre que os campos invariantes à esquerda e os campos invariantes à direita são campos de Killing.

1.6

1. Dado uma curva diferenciável $\gamma : I \to M$, com $\gamma'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$, considere as hipersuperfícies

$$M_t = \{\exp_{\gamma(t)}(v) : v \in T_{\gamma(t)}M,\ \|v\| = \mathit{const},\ \langle v, \gamma'(t)\rangle = 0\}.$$

Mostre que, para cada vetor $v \in T_{\gamma(t)}M$, satisfazendo $\langle v, \gamma'(t)\rangle = 0$, a geodésica $s \mapsto \exp_{\gamma(t)}(s \cdot v)$ é ortogonal às hipersuperfícies M_t.

2. Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto e conexo. Uma *superfície parametrizada* em uma variedade Riemanniana M é simplesmente uma aplicação diferenciável $f : A \to M$. Se (x, y) denotam as coordenadas usuais de $\mathbb{R}^2$, mostre que

$$\frac{D}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{D}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Capítulo 2

Variedades Riemannianas Completas

2.1 O teorema de Hopf-Rinow

A partir de agora M denotará uma variedade Riemanniana conexa.

Definição 2.1.1. Uma variedade Riemanniana M é chamada *geodesicamente completa* se toda geodésica de M pode ser extendida a uma geodésica definida em todo $\mathbb{R}$.

De forma equivalente, M é geodesicamente completa se, e somente se, a aplicação exponencial $\exp_p$ está definida em todo o espaço tangente T_pM, qualquer que seja o ponto $p \in M$.

Exemplo 2.1.2. O espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ satisfaz trivialmente esta condição, pois suas geodésicas são retas.

Exemplo 2.1.3. O semi-plano superior $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ não é geodesicamente completo em relação à métrica Euclidiana $\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$. No entanto, é geodesicamente completo em relação à métrica hiperbólica $\frac{1}{y^2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)$.

Lema 2.1.4. Dado uma variedade Riemanniana M, considere dois pontos distintos $x, y \in M$ e seja S a esfera geodésica de raio $\epsilon > 0$ e centro no ponto x em (M, d). Se $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno, existe um ponto $z \in M$ tal que

$$d(x, z) + d(z, y) = d(x, y). \tag{2.1}$$

Demonstração. Escolha $0 < \epsilon < d(x, y)$ suficientemente pequeno de modo que $\exp_x(B_\epsilon(0_x))$ seja uma vizinhança normal de x. Seja $S = \exp_x(S_\epsilon(0_x))$. Como S é compacto, existe $z \in S$ tal que $d(y, S) = d(y, z)$. Considere agora uma curva diferenciável por partes $\gamma : [0, 1] \to M$ ligando x e y. Como $d(x, y) > \epsilon$, a curva γ intercepta S em algum ponto $\gamma(t_0)$. Então

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= l\left(\gamma|_{[0,t_0]}\right) + l\left(\gamma|_{[t_0,1]}\right) \\ &\geq d(x, \gamma(t_0) + d(\gamma(t_0), y) \\ &\geq d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

Como γ foi escolhida de forma arbitrária, isso implica que

$$d(x, y) \geq d(x, z) + d(z, y).$$

A igualdade (2.1) segue agora da desigualdade triangular. □

Proposição 2.1.5. Considere um ponto $p \in M$ para o qual a aplicação exponencial $\exp_p$ está definida em todo o espaço tangente T_pM. Então, todo ponto de M pode ser ligado a p por uma geodésica minimizante.

Demonstração. Dado um ponto $q \in M$, segue do Lema 2.1.4 que, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $p_0 \in M$ tal que

$$d(p, p_0) = \epsilon \quad \text{e} \quad d(p, p_0) + d(p_0, q) = d(p, q).$$

Seja $v \in T_pM$ o vetor unitário tal que $\exp_p(\epsilon v) = p_0$ e considere a curva $\gamma(t) = \exp_p(tv)$. Temos que γ é uma geodésica em M definida em todo $\mathbb{R}$. Afirmamos que $\gamma(d(p, q)) = q$. Considere o conjunto

$$I = \{t \in \mathbb{R} : d(p, q) = t + d(\gamma(t), q)\}.$$

Note que $0, \epsilon \in I$, logo $I \neq \emptyset$. Seja

$$T = \sup I \cap [0, d(p, q)].$$

Como $d : M \times M \to \mathbb{R}$ é contínua, tem-se que I é fechado, logo $T \in I$. Se mostrarmos que $T = d(p, q)$, o resultado seguirá. Suponha, por absurdo, que $T < d(p, q)$. Então, podemos aplicar o Lema 2.1.4 aos pontos $\gamma(T)$ e q a fim de encontrar $\delta > 0$ e $q_0 \in M$ tais que

$$d(\gamma(T), q_0) = \delta \quad \text{e} \quad d(\gamma(T), q_0) + d(q_0, q) = d(\gamma(T), q). \tag{2.2}$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(p, q_0) &\geq d(p, q) - d(q_0, q) \\ &= d(p, q) - \big(d(\gamma(T), q) - d(\gamma(T), q_0)\big) \\ &= \big(d(p, q) - d(\gamma(T), q)\big) + d(\gamma(T), q_0) \\ &= T + \delta, \end{aligned} \tag{2.3}$$

pois $T \in I$. Seja η a única geodésica minimizante ligando $\gamma(T)$ e q_0. Como a concatenação de $\gamma|_[0, T]$ e η é uma curva diferenciável por partes de comprimento $T + \delta$, ligando p e q_0, segue de (2.3) que

$$d(p, q_0) = T + \delta.$$

Por outro lado, a concatenação é uma curva minimizante de modo que, pelos Lema 1.6.5 e Teorema 1.6.6, ela deve ser geodésica, logo diferenciável. Devido à unicidade das geodésicas, com fixadas condições iniciais, a curva η extende a curva $\gamma|_{[0,T]}$ como uma geodésica e, assim,

$$\gamma(T + \delta) = \eta(\delta) = q_0. \tag{2.4}$$

Usando (2.2) e (2.4), temos:

$$\begin{aligned} d(q, \gamma(T + \delta)) + T + \delta &= d(q, q_0) + d(\gamma(T), q_0) + T \\ &= d(\gamma(T), q) + T \\ &= d(p, q), \end{aligned}$$

e isso implica que $T + \delta \in I$, o que é uma contradição. Assim, devemos ter $T = d(p, q)$. $\square$

Corolário 2.1.6. Se M é geodesicamente completa, então quaisquer dois pontos de M podem ser ligados por uma geodésica minimizante.

Teorema 2.1.7 (Hopf-Rinow)**.** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) M é geodesicamente completa.

(b) Para todo $p \in M$, a aplicação $\exp_p$ está definida em todo T_pM.

(c) Para algum $p \in M$, a aplicação $\exp_p$ está definida em todo T_pM.

(d) Todo subconjunto fechado e limitado de (M, d) é compacto.

(e) (M, d) é completo como espaço métrico.

Demonstração. As implicações $(a) \Rightarrow (b)$ e $(b) \Rightarrow (c)$ são imediatas, enquanto que $(d) \Rightarrow (e)$ segue da teoria de espaços métricos. Provemos, inicialmente, $(c) \Rightarrow (d)$. Seja $K \subset M$ um subconjunto fechado e limitado. Como K é limitado, existe $R > 0$ tal que $\sup_{x \in K}\{d(x,p)\} < R$. Por outro lado, pela hipótese e pela Proposição 2.1.5, segue que, para todo ponto $q \in K$, existe uma geodésica minimizante γ ligando p e q. Note que

$$l(\gamma) = d(p,q) < R.$$

Isso mostra que $K \subset \exp_p(B(0_p;R))$, logo $K \subset \exp_p(\overline{B(0_p;R)})$, mostrando que K é compacto. Finalmente, mostremos a implicação $(e) \Rightarrow (a)$. Seja γ uma geodésica em M, com $\|\gamma'(t)\| = 1$. Pelo teorema de existência e unicidade das soluções das equações diferenciais de segunda ordem, o intervalo maximal de definição de γ é aberto, digamos (a,b), onde $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Afirmamos que $a = -\infty$ e $b = +\infty$. De fato, suponhamos que $b < +\infty$. Escolha uma sequência (t_n) em (a,b), convergindo para b. Como

$$d\big(\gamma(t_m), \gamma(t_n)\big) \leq l(\gamma|_{[t_m,t_n]}) = t_n - t_m,$$

para $n > m$, concluimos que a sequência $(\gamma(t_n))$ é de Cauchy, logo converge para algum ponto $p \in M$, em virtude da hipótese (e). Seja U uma vizinhança totalmente normal de p, dado pela Proposição 1.4.10, tal que toda geodésica partindo de um ponto de U esteja definida em um intervalo aberto $(-\epsilon, \epsilon)$, para algum $\epsilon > 0$. Escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|t_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad \gamma(t_n) \in U.$$

Assim, $t_n + \epsilon > b + \frac{\epsilon}{2}$, logo a geodésica γ pode ser extendida ao intervalo aberto $(a, b + \epsilon/2)$, o que é uma contradição. Portanto, deve-se ter $b = +\infty$. Analogamente se mostra que $a = -\infty$, e isso finaliza a prova do teorema. $\square$

Corolário 2.1.8. Toda variedade Riemanniana compacta é completa.

O *diâmetro* de um espaço métrico (M,d), denotado por $\operatorname{diam}(M)$, é definido pondo

$$\operatorname{diam}(M) = \sup\{d(x,y) : x, y \in M\}.$$

Corolário 2.1.9. Toda variedade Riemanniana completa de diâmetro limitado é compacta.

Proposição 2.1.10. Dados uma variedade Riemanniana M, uma geodésica $\gamma : I \to M$ e um intervalo fechado $[a,b] \subset I$, valem as seguintes proprieddes:

(a) Se η é outra geodésica em M, com $l(\eta) = l\left(\gamma|_{[a,b]}\right)$, então γ não é minimizante no intervalo $[a, b+\epsilon]$.

(b) Se M é completa e não existe geodésica ligando $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$, com comprimento menor do que γ, então γ é minimizante em $[a, b]$.

Demonstração. Considere a curva $\alpha : [a, b+\epsilon] \to M$ definida por

$$\alpha(t) = \begin{cases} \eta(t), & \text{se} \quad t \in [a, b] \\ \gamma(t), & \text{se} \quad t \in [b, b+\epsilon] \end{cases},$$

onde $\epsilon > 0$ é tal que $b + \epsilon \in I$. Como η e γ são geodésicas distintas, α não é diferenciável em $t = b$. Disso decorre que α não é minimizante no intervalo $[a, b+\epsilon]$. Como α e γ têm mesmo comprimento em $[a, b+\epsilon]$, isso implica que γ não é minimizante neste intervalo, provando o item (a). Finalmente, se M é completa existe, em virtude da Proposição 2.1.5, uma geodésica minimizante α ligando $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$. Como não existe geodésica ligando $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$, de comprimento menor do que a de γ, então α e γ têm mesmo comprimento, implicando que γ também é geodésica minimizante. □

2.2 Recobrimentos

Sejam $\tilde{M}$ e M variedades diferenciáveis.

Definição 2.2.1. Uma aplicação diferenciável e sobrejetora $\pi : \tilde{M} \to M$ chama-se um *recobrimento* se cada ponto $p \in M$ pertence a uma vizinhança $V \subset M$ tal que

$$\pi^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

é uma união de abertos U_α, dois a dois disjuntos, tais que $\pi|_{U_\alpha} : U_\alpha \to V$ é um difeomorfismo, para todo $\alpha \in I$.

A variedade $\tilde{M}$ chama-se um *espaço de recobrimento* de M e, para cada $p \in M$, o conjunto $\pi^{-1}(p)$ chama-se a *fibra* sobre p. A variedade M é chamada a *base* do recobrimento. A vizinhança V é usualmente chamada de *vizinhança distinguida*.

Exemplo 2.2.2. A aplicação $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por $\pi(t) = e^{2\pi i t}$ é um recobrimento. De fato, dado $p \in \mathbb{S}^1$, considere a vizinhança $V = \mathbb{S}^1 \setminus \{-p\}$ de p em $\mathbb{S}^1$. Como $p = \big(\cos(2\pi t_0), \sin(2\pi t_0)\big)$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$, tem-se que $\pi^{-1}(p) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$, onde

$$I_n = \left\{ t \in \mathbb{R} : t_0 + n - \frac{1}{2} < t < t_0 + n + \frac{1}{2} \right\}.$$

Os intervalos abertos I_n são dois a dois disjuntos e cada um dos quais é transformado difeomorficamente sobre V através de π.

Exemplo 2.2.3. A aplicação $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definida por $\pi(z) = \exp(z)$ é um recobrimento. De fato, dado $\theta \in [-\pi, \pi]$, considere

$$V_\theta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \arg(-z) \neq \theta\}.$$

Então, $\pi^{-1}(V_\theta)$ é a união disjunta dos conjuntos abertos

$$U_n = \{z \in \mathbb{C} : |Im(z) - \theta - 2\pi n| < \pi\},$$

$n \in \mathbb{Z}$, e π transforma cada um destes abertos difeomorficamente sobre V_θ.

Definição 2.2.4. Um *recobrimento Riemanniano* $\pi : \tilde{M} \to M$, entre duas variedades Riemannianas, é um recobrimento que é também uma isometria local.

Proposição 2.2.5. Seja $\pi : \tilde{M} \to M$ um recobrimento. Se M é uma variedade Riemanniana, existe uma única métrica Riemanniana em $\tilde{M}$ que torna π um recobrimento Riemanniano.

Demonstração. Se existe tal métrica $\langle , \rangle$ em $\tilde{M}$, então para quaisquer $\tilde{p} \in \tilde{M}$ e $v, w \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$, devemos ter

$$\langle v, w \rangle_{\tilde{p}} = \langle \mathrm{d}\pi(\tilde{p}) \cdot v, \mathrm{d}\pi(\tilde{p}) \cdot w \rangle_{\pi(\tilde{p})}. \tag{2.5}$$

Reciprocamente, como $\mathrm{d}\pi(\tilde{p})$ é um isomorfismo linear, a fórmula (2.5) define um produto interno em $T_{\tilde{p}}\tilde{M}$. Além disso, esse produto interno depende diferenciavelmente em $\tilde{p}$ pois π é um difeomorfismo local. $\square$

Proposição 2.2.6. Seja G um grupo agindo numa variedade Riemanniana $\tilde{M}$ de forma livre e própria por isometrias. Então, existe uma única métrica Riemanniana em $M = \tilde{M}/G$, chamada a *métrica quociente*, que torna a projeção $\pi : \tilde{M} \to M$ um recobrimento Riemanniano.

Demonstração. Dado um ponto $p \in M$, considere uma vizinhança distinguida V de p em M, com $\pi^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$. No aberto V, pomos

$$\langle , \rangle = \left((\pi|_{U_i})^{-1}\right)^* \langle , \rangle_{\tilde{M}},$$

para qualquer $i \in I$. De forma mais precisa, dados $q \in V$, $v, w \in T_qM$ e $i \in I$, seja $\tilde{q}_i = (\pi|_{U_i})^{-1}(q)$ o único ponto da fibra $\pi^{-1}(q)$ que está no aberto U_i. Definimos

$$\langle v, w \rangle_q = \left\langle \mathrm{d}\pi(\tilde{q}_i)^{-1} \cdot v, \mathrm{d}\pi(\tilde{q}_i)^{-1} \cdot w \right\rangle_{\tilde{q}_i}.$$

Afirmamos que esta definição não depende da escolha do ponto em $\pi^{-1}(q)$. De fato, se $\tilde{q}_j$ é outro ponto em $\pi^{-1}(q)$, existe uma isometria $f \in G$ tal que $f(\tilde{q}_i) = \tilde{q}_j$. Como $\pi \circ f = \pi$, segue da regra da cadeia que

$$\mathrm{d}\pi(\tilde{q}_j) \circ \mathrm{d}f(\tilde{q}_i) = \mathrm{d}\pi(\tilde{q}_i),$$

logo

$$\begin{aligned} \left\langle \mathrm{d}\pi(\tilde{q}_i)^{-1}v, \mathrm{d}\pi(\tilde{q}_i)^{-1}w \right\rangle &= \left\langle \mathrm{d}f(\tilde{q}_i)^{-1}\big(\mathrm{d}\pi(\tilde{q}_j)^{-1}v\big), \mathrm{d}f(\tilde{q}_i)^{-1}\big(\mathrm{d}\pi(\tilde{q}_j)^{-1}w\big) \right\rangle \\ &= \left\langle \mathrm{d}\pi(\tilde{q}_j)^{-1}v, \mathrm{d}\pi(\tilde{q}_j)^{-1}w \right\rangle, \end{aligned}$$

pois $\mathrm{d}f(\tilde{q}_i) : T_{\tilde{q}_i}\tilde{M} \to T_{\tilde{q}_j}\tilde{M}$ é uma isometria linear. Finalmente, a diferenciabilidade da métrica $\langle , \rangle$ segue do fato de que, localmente, ela é dada por uma métrica pull-back. □

Exemplo 2.2.7 (Espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$)**.** Como conjunto, $\mathbb{R}P^n$ é constituído de todas as retas em $\mathbb{R}^{n+1}$ que passam pela origem. Observe, inicialmente, que toda reta intercepta a esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ em dois pontos antipodais, de modo que podemos ver $\mathbb{R}P^n$ como um espaço quociente de $\mathbb{S}^n$, declarando que $x, y \in \mathbb{S}^n$ são equivalente se, e somente se, $x = \pm y$. Considere agora o grupo G consistindo de duas isometrias de $\mathbb{S}^n$, a aplicação identidade e a aplicação antípoda. Então, G age na esfera de forma livre e própria (G é um grupo finito), logo $\mathbb{R}P^n$ admite uma estrutura de variedade diferenciável. Além disso, como a ação de G é por isometrias, segue da Proposição 2.2.6 que $\mathbb{R}P^n$ admite uma métrica Riemanniana tornando a projeção $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$ um recobrimento Riemanniano.

Proposição 2.2.8. Seja $\pi : \tilde{M} \to M$ um recobrimento Riemanniano. As geodésicas de M são as projeções das geodésicas de $\tilde{M}$, e as geodésicas de $\tilde{M}$ são os levantamentos das geodésicas de M.

Demonstração. Sejam γ e $\tilde{\gamma}$ curvas diferenciáveis em M e $\tilde{M}$, respectivamente, com $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Como π é isometria local, π transforma arcos suficientemente pequenos de $\tilde{\gamma}$ isometricamente sobre pequenos arcos de γ. Disso decorre que $\tilde{\gamma}$ é geodésica se, e somente se, γ é geodésica. Finalmente, observe que toda curva diferenciável em M é a projeção de qualquer uma de seu levantamento diferenciável, e toda curva diferenciável em $\tilde{M}$ é o levantamento diferenciável de sua projeção a M. □

Exemplo 2.2.9. Considere o recobrimento Riemanniano $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$. Como as geodésicas de $\mathbb{S}^n$ são os grandes círculos, parametrizados com velocidade constante, as geodésicas de $\mathbb{R}P^n$ são as projeções destas. Em particular, como a projeção π identifica pontos antipodais de $\mathbb{S}^n$, as geodésicas de $\mathbb{R}P^n$, parametrizadas pelo comprimento de arc, são periódicas de período igual a π.

Proposição 2.2.10. Seja $\pi : \tilde{M} \to M$ um recobrimento Riemanniano no qual a base M é completa. Então, $\tilde{M}$ também é completa.

Demonstração. Seja $\tilde{\gamma}$ uma geodésica em $\tilde{M}$. Então, pela Proposição 2.2.8, a curva $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$ é uma geodésica em M, que está definida em todo $\mathbb{R}$ em virtude da completude de M. Novamente, pela Proposição 2.2.8, $\tilde{\gamma}$ é o levantamento de γ, logo $\tilde{\gamma}$ pode ser extendida a fim de estar definida em todo $\mathbb{R}$, mostrando que $\tilde{M}$ é geodesicamente completa. $\square$

Queremos agora obter um resultado na direção oposta da Proposição 2.2.10. Para isso, faremos uso do seguinte lema auxiliar.

Lema 2.2.11. Se $f : M \to N$ é uma isometria local, então

$$f(\exp_p(v)) = \exp_{f(p)}(\mathrm{d}f(p) \cdot v),$$

desde que $\exp_p(v)$ esteja definido.

Demonstração. Dado um ponto $p \in M$, seja $v \in T_pM$ para o qual $\exp_p(v)$ esteja definido. Assim,

$$t \mapsto \exp_p(tv)$$

é uma geodésica e, como f é isometria local, tem-se que $t \mapsto f(\exp_p(tv))$ também é uma geodésica. Como

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\exp_p(tv))|_{t=0} &= \mathrm{d}f(p) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp_p(tv)|_{t=0}\right) \\ &= \mathrm{d}f(p) \cdot v,\end{aligned}$$

segue que

$$f(\exp_p(tv)) = \exp_{f(p)}(t\mathrm{d}f(p) \cdot v).$$

Fazendo $t = 1$ na igualdade acima, obtemos o resultado. $\square$

Teorema 2.2.12. *Seja $\pi : \tilde{M} \to M$ uma isometria local. Se $\tilde{M}$ é completa, então π é um recobrimento Riemanniano e M também é completa.*

Demonstração. Dado um ponto $p \in M$, considere um número $\epsilon > 0$ tal que a aplicação exponencial $\exp_p : B(0_p, \epsilon) \to B(p, \epsilon)$ seja um difeomorfismo. Afirmamos que $B(p, \epsilon)$ é uma vizinhança distinguida de p, ou seja, $\pi^{-1}(B(p, \epsilon))$ é recoberta pelas bolas abertas $B(\tilde{p}, \epsilon)$, onde $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$. A completude de

$\tilde{M}$ garante que $\exp_{\tilde{p}} : B(0_{\tilde{p}}, \epsilon) \to B(\tilde{p}, \epsilon)$ está bem definida. Além disso, como π é isometria local, segue do Lema 2.2.11 que

$$\pi(\exp_{\tilde{p}}(v)) = \exp_p(\mathrm{d}\pi(\tilde{p}) \cdot v),$$

para todo $v \in B(0_{\tilde{p}}, \epsilon) \subset T_{\tilde{p}}\tilde{M}$, ou seja, o diagrama

$$\begin{tikzcd} B\left(0_{\tilde{p}}, \epsilon\right) \arrow[r, "\exp_{\tilde{p}}"] \arrow[d, "\mathrm{d}\pi(\tilde{p})"'] & B(\tilde{p}, \epsilon) \arrow[d, "\pi"] \\ B\left(0_{p}, \epsilon\right) \arrow[r, "\exp_{p}"'] & B(p, \epsilon) \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

é comutativo. Como $\exp_p$ e $\mathrm{d}\pi(\tilde{p})$ são difeomorfismos, segue que a aplicação $\pi \circ \exp_{\tilde{p}} : B(0_{\tilde{p}}, \epsilon) \to B(p, \epsilon)$ também é um difeomorfismo. Por outro lado, decorre da Proposição 2.1.5 que todo ponto de $B(\tilde{p}, \epsilon)$ pode ser ligado a $\tilde{p}$ por uma geodésica minimizante, implicando que $\exp_{\tilde{p}}(B(0_{\tilde{p}}, \epsilon)) = B(\tilde{p}, \epsilon)$, ou seja, $\exp_{\tilde{p}} : B(0_{\tilde{p}}, \epsilon) \to B(\tilde{p}, \epsilon)$ é sobrejetora. A comutatividade do diagrama (2.6) implica que $\exp_{\tilde{p}} : B(0_{\tilde{p}}, \epsilon) \to B(\tilde{p}, \epsilon)$ é também injetora. Isso implica que $\pi : B(\tilde{p}, \epsilon) \to B(p, \epsilon)$ é bijetora e, sendo um difeomorfismo local, é um difeomorfismo. Isso também implica que

$$\bigcup_{\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)} B(\tilde{p}, \epsilon) \subset \pi^{-1}(B(p, \epsilon)).$$

Reciprocamente, dado $\tilde{q} \in \pi^{-1}(B(p, \epsilon))$, seja $q = \pi(\tilde{q}) \in B(p, \epsilon)$. Pela escolha de ϵ, existe um único $v \in T_qM$, com $\|v\| < \epsilon$, tal que $\exp_q(v) = p$. Seja

$$\tilde{v} = \mathrm{d}\pi(\tilde{q})^{-1} \cdot v \in T_{\tilde{q}}\tilde{M}.$$

A geodésica $\tilde{\gamma}(t) = \exp_{\tilde{q}}(t\tilde{v})$ está definida em todo $\mathbb{R}$, devido a completude de $\tilde{M}$. Temos

$$\begin{aligned} (\pi \circ \tilde{\gamma})(1) &= \pi\big(\exp_{\tilde{q}}(\tilde{v})\big) = \exp_{\pi(\tilde{q})}\big(\mathrm{d}\pi(\tilde{q}) \cdot \tilde{v}\big) \\ &= \exp_q(v) = p, \end{aligned}$$

de modo que $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{p}_0$, para algum $\tilde{p}_0 \in \pi^{-1}(p)$. Como $\|v\| < \epsilon$, temos que

$$\tilde{q} = \tilde{\gamma}(0) \in B(\tilde{p}_0, \epsilon),$$

e isso mostra que

$$\pi^{-1}(B(p, \epsilon)) \subset \bigcup_{\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)} B(\tilde{p}, \epsilon).$$

Tomando $\delta = \epsilon/2$ temos, da mesma forma, que

$$\pi^{-1}(B(p,\delta)) = \bigcup_{\tilde{p}\in\pi^{-1}(p)} B(\tilde{p},\delta).$$

Afirmamos que as bolas abertas $B(\tilde{p},\delta)$, com $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$, são duas a duas disjuntas. De fato, se existisse um ponto $\tilde{q} \in B(\tilde{p}_i,\delta) \cap B(\tilde{p}_j,\delta)$, para alguns $\tilde{p}_i, \tilde{p}_j \in \pi^{-1}(p)$, então

$$d(\tilde{p}_i,\tilde{p}_j) \leq d(\tilde{p}_i,\tilde{q}) + d(\tilde{q},\tilde{p}_j) < \delta + \delta = \epsilon,$$

de modo que $\tilde{p}_j \in B(\tilde{p}_i,\epsilon)$. Porém, π é injetora na bola $B(\tilde{p}_i,\epsilon)$, logo devemos ter $\tilde{p}_i = \tilde{p}_j$ e, assim, $i = j$. Provamos, assim, que π é um recobrimento Riemanniano. Finalmente, a completude de M segue da completude de $\tilde{M}$ junto com a Proposição 2.2.8. □

2.3 Submersões Riemannianas

Uma aplicação diferenciável $\pi : M \to N$, entre duas variedades diferenciáveis, é chamada uma *submersão* se a diferencial $\mathrm{d}\pi(p)$ é sobrejetora, para todo $p \in M$. Neste caso, $\mathcal{V}_p = \ker \mathrm{d}\pi(p)$ define uma distribuição diferenciável em M, chamada de *distribuição vertical.* Note que $\mathcal{V}$ pode ser identificada com os espaços tangentes às fibras de π.

Em geral, não existe uma escolha canônica para uma distribuição complementar a $\mathcal{V}$ em TM, mas este é o caso quando M é uma variedade Riemanniana. Neste caso, podemos construir um complemento $\mathcal{H}$ definindo $\mathcal{H}_p$ como sendo o complemento ortogonal de $\mathcal{V}_p$ em T_pM. Então, $\mathcal{H}$ é uma distribuição diferenciável chamada a *distribuição horizontal.* Observe que $\mathrm{d}\pi(p)$ induz um isomorfismo linear entre $\mathcal{H}_p$ e $T_{\pi(p)}N$, para todo $p \in M$.

Definição 2.3.1. Uma *submersão Riemanniana* $\pi : M \to N$, entre duas variedades Riemannianas, é uma submersão de modo que a diferencial $\mathrm{d}\pi(p)$ induz uma isometria entre $\mathcal{H}_p$ e $T_{\pi(p)}N$, qualquer que seja $p \in M$.

Note que recobrimentos Riemannianos são casos particulares de submersões Riemannianas.

Exemplo 2.3.2. Se M_1 e M_2 são variedades Riemannianas, as projeções $\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i$ são exemplos triviais de submersões Riemannianas.

Se $\tilde{M}$ é uma variedade diferenciável e G é um grupo de Lie agindo em $\tilde{M}$ de forma livre e própria, então o espaço quociente $M = \tilde{M}/G$, munido da topologia quociente, admite uma única estrutura de variedade diferenciável tal que a projeção $\pi : \tilde{M} \to M$ é uma submersão (sobrejetora).

Proposição 2.3.3. Se $\tilde{M}$ é uma variedade Riemanniana e G age em $\tilde{M}$ por isometrias, de forma livre e própra, então existe uma única métrica Riemanniana em $M = \tilde{M}/G$, chamada a *métrica quociente*, de modo que $\pi : \tilde{M} \to M$ é uma submersão Riemanniana.

Demonstração. Dados $p \in M$ e $v, w \in T_pM$, definimos

$$\langle v, w\rangle_p = \langle \tilde{v}, \tilde{w}\rangle_{\tilde{p}}, \tag{2.7}$$

onde $\tilde{p}$ é qualquer ponto da fibra $\pi^{-1}(p)$ e $\tilde{v}, \tilde{w}$ são os únicos vetores horizontais em $\mathcal{H}_{\tilde{p}}$ satisfazendo

$$\mathrm{d}\pi(\tilde{p}) \cdot \tilde{v} = v \quad \text{e} \quad \mathrm{d}\pi(\tilde{p}) \cdot \tilde{w} = w.$$

Devemos provar, inicialmente, que a expressão (2.7) independe da escolha do ponto $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$. De fato, se $\tilde{q}$ é outro ponto em $\pi^{-1}(p)$, sejam $\tilde{u}, \tilde{z} \in T_{\tilde{q}}\tilde{M}$ tais que

$$\mathrm{d}\pi(\tilde{q}) \cdot \tilde{u} = v \quad \text{e} \quad \mathrm{d}\pi(\tilde{q}) \cdot \tilde{z} = w.$$

Por outro lado, existe um elemento $g \in G$ tal que $\tilde{q} = g(\tilde{p})$ e $\mathrm{d}f(\tilde{p}) : \mathcal{H}_{\tilde{p}} \to \mathcal{H}_{\tilde{q}}$ é uma isometria satisfazendo

$$\mathrm{d}g(\tilde{p}) \cdot \tilde{v} = \tilde{u} \quad \text{e} \quad \mathrm{d}g(\tilde{p}) \cdot \tilde{w} = \tilde{z}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\langle v, w\rangle_p &= \langle \tilde{v}, \tilde{w}\rangle_{\tilde{p}} = \langle \mathrm{d}g(\tilde{p})^{-1} \cdot \tilde{u}, \mathrm{d}g(\tilde{p})^{-1} \cdot \tilde{z}\rangle_{\tilde{p}} \\ &= \langle \tilde{u}, \tilde{z}\rangle_{\tilde{q}}.\end{aligned}$$

Resta mostrar a diferenciabilidade da métrica em (2.7). Para isso, considere a projeção ortogonal $P_{\tilde{p}} : T_{\tilde{p}}\tilde{M} \to \mathcal{H}_{\tilde{p}}$. Sabemos que, por π ser uma submersão, π é uma aplicação aberta e todo ponto de $\tilde{M}$ pertence à imagem de uma seção local $s : U \to \tilde{M}$ de $\tilde{M}$, onde U é um aberto em M ($\pi \circ s = id|_U$). Reescrevemos (2.7) como

$$\langle v, w\rangle_p = \big\langle P_{s(p)}\big(\mathrm{d}s(p) \cdot v\big), P_{s(p)}\big(\mathrm{d}s(p) \cdot w\big)\big\rangle_{s(p)},$$

onde $p \in U$, mostrando que $\langle , \rangle$ é localmente diferenciável. Finalmente, a exigência que π é uma submersão Riemanniana força a métrica $\langle , \rangle$ ser dada pela fórmula (2.7), e isso prova a unicidade da métrica. $\square$

Exemplo 2.3.4 (Espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$)**.** Como conjunto, $\mathbb{C}P^n$ é constituído das retas complexas em $\mathbb{C}^{n+1}$ que passam pela origem, de modo que podemos identificá-lo como o quociente da esfera $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ pelo grupo multiplicativo dos números complexos unitários $\mathbb{S}^1$. Aqui, a ação de $\mathbb{S}^1$ em $\mathbb{S}^{2n+1}$ é dada pela multiplicação coordenada a coordenada. Como $\mathbb{S}^1$ é compacto, essa ação é livre e própria em $\mathbb{S}^{2n+1}$, logo $\mathbb{C}P^n = \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ tem uma estrutura de variedade diferenciável compacta de dimensão $2n$. Além disso, essa ação é por isometrias. De fato, dado $z \in \mathbb{S}^1$, considere a multiplicação $L_z : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{S}^{2n+1}$ em $\mathbb{S}^{2n+1}$. A esfera $\mathbb{S}^{2n+1}$ tem a métrica Riemanniana induzida de $\mathbb{R}^{2n+2}$; o produto interno Euclidiano é a parte real do produto interno Hermitiano $(\cdot,\cdot)$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ e

$$\begin{aligned}(L_z(x), L_z(y)) &= (z\cdot x, z\cdot y) = \sum_{i=1}^{n+1} z\cdot x_i \cdot \overline{z\cdot y_i}\\ &= \sum_{i=1}^{n+1} z\cdot \overline{z}\cdot x_i\cdot \overline{y}_i = \|z\|^2(x,y) = (x,y),\end{aligned}$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{C}^{n+1}$. Portanto, existe uma métrica Riemanniana em $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ que torna a projeção $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ uma submersão Riemanniana. Essa métrica quociente é usualmente chamada de *métrica de Fubini-Study* em $\mathbb{C}P^n$.

Dado uma submersão Riemanniana $\pi : \tilde{M} \to M$, denote por $\mathcal{H}$ a distribuição horizontal associada em $\tilde{M}$. Uma curva diferenciável $\gamma : I \to \tilde{M}$ é chamada *horizontal* se $\gamma'(t) \in \mathcal{H}_{\gamma(t)}$, para todo $t \in I$.

Teorema 2.3.5. *Dado uma submersão Riemanniana $\pi : \tilde{M} \to M$, valem as seguintes propriedades:*

(a) π é não-crescente em relação à distância, ou seja,

$$d(\pi(\tilde{x}), \pi(\tilde{y})) \leq d(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

para quaiquer $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{M}$.

(b) Seja $\gamma : I \to M$ uma geodésica em M. Dado $\tilde{p} \in \pi^{-1}(\gamma(t_0))$, existe um único levantamento $\tilde{\gamma}$ de γ, localmente horizontal, com $\tilde{\gamma}(t_0) = \tilde{p}$, tal que $\tilde{\gamma}$ é geodésica em $\tilde{M}$.

(c) Seja $\tilde{\gamma} : I \to \tilde{M}$ uma geodésica em $\tilde{M}$. Se $\tilde{\gamma}'(t_0)$ é um vetor horizontal, então $\tilde{\gamma}'(t)$ é horizontal para todo $t \in I$, e a curva $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$ é uma geodésica em M, com o mesmo comprimento de $\tilde{\gamma}$.

(d) Se $\tilde{M}$ é completa, o mesmo vale para M.

Demonstração. (a) Dados $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{M}$, seja $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \tilde{M}$ uma curva diferenciável por partes ligando $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$. Assim, $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$ é uma curva diferenciável por partes ligando $\pi(\tilde{x})$ e $\pi(\tilde{y})$. Além disso, tem-se $l(\gamma) \leq l(\tilde{\gamma})$, pois a projeção $\mathrm{d}\pi : T\tilde{M} \to TM$ anula as componentes verticais dos vetores e preserva as horizontais. Disso decorre que $d(\pi(\tilde{x}), \pi(\tilde{y})) \leq d(\tilde{x}, \tilde{y})$.

(b) Seja γ uma geodésica em M. Sendo γ uma imersão (γ é não-constante), existe $\epsilon > 0$ tal que $N = \gamma(-\epsilon, \epsilon)$ é uma subvariedade mergulhada de dimensão 1 de M. Como π é submersão, $\tilde{N} = \pi^{-1}(N)$ é uma subvariedade de dimensão 1 mergulhada de $\tilde{M}$. Além disso, existe uma função diferenciável $\phi : \tilde{N} \to (-\epsilon, \epsilon)$ tal que

$$\pi(\tilde{x}) = \gamma(\phi(\tilde{x})),$$

para todo $\tilde{x} \in \tilde{N}$. Tome, por exemplo, $\phi = \gamma^{-1} \circ \pi|_{\tilde{N}}$. Usando ϕ, podemos definir um campo vetorial horizontal em $\tilde{N}$ pondo

$$\tilde{X}(\tilde{x}) = (\mathrm{d}\pi(\tilde{x})|_{\mathcal{H}_{\tilde{x}}})^{-1} \cdot \gamma'(\phi(\tilde{x})), \tag{2.8}$$

para todo $\tilde{x} \in \tilde{N}$. Dado $\tilde{p} \in \pi^{-1}(\gamma(0))$, seja $\tilde{\gamma}$ a curva integral de $\tilde{X}$, com $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$. Então $\tilde{\gamma}$ é uma curva horizontal definida numa vizinhança de 0 e, em virtude de (2.8), tem-se $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Afirmamos que $\tilde{\gamma}$ é geodésica em $\tilde{M}$. De fato, em virtude do Teorema 1.6.6 e do item (a), segue que para todo t_0 no domínio de γ, existe um número $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} l\left(\tilde{\gamma}|_{[t_0, t_0+h]}\right) &= l\left(\gamma|_{[t_0, t_0+h]}\right) = d\left(\gamma(t_0), \gamma(t_0+h)\right) \\ &\leq d\left(\tilde{\gamma}(t_0), \tilde{\gamma}(t_0+h)\right), \end{aligned}$$

para todo $0 < h < \delta$, e existe uma fórmula similar para o caso $-\delta < h < 0$. Disso decorre que $\tilde{\gamma}$ é localmente minimizante. Como $\|\tilde{\gamma}'(t)\| = \|\gamma'(t)\|$ é constante, segue que $\tilde{\gamma}$ já está parametrizada proporcional ao comprimento de arco e, assim, é geodésica.

(c) Dado uma geodésica $\tilde{\gamma} : I \to \tilde{M}$ de $\tilde{M}$, seja $\tilde{p} = \tilde{\gamma}(0)$. Seja γ a geodésica em M com condições iniciais

$$\gamma(0) = \pi(\tilde{p}) \quad \text{e} \quad \gamma'(0) = \mathrm{d}\pi(\tilde{p}) \cdot \tilde{\gamma}'(0).$$

Pelo item (b), existe um levantamento $\tilde{\eta}$ de γ, localmente horizontal, com $\tilde{\eta}(0) = \tilde{p}$, que também é geodésica em $\tilde{M}$. Como $\tilde{\gamma}'(0)$ e $\tilde{\eta}'(0)$ são ambos vetores horizontais, segue que $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\eta}$ coincidem na interseção dos seus intervalos abertos de difinição. Este intervalo é também o conjunto dos pontos no domínio de $\tilde{\gamma}$ onde ela é um levantamento horizontal de γ. Agora, sendo $\tilde{\gamma}$ levantamento horizontal de γ, o conjunto dos instantes onde $\tilde{\gamma}$ é levantamento horizontal de γ é também fechado em seu domínio, logo $\tilde{\gamma}$ é levantamento horizontal de γ em todo seu domínio. Finalmente, o fato que γ e $\tilde{\gamma}$ têm o mesmo comprimento segue de que $\mathrm{d}\pi(\tilde{x}) : \mathcal{H}_{\tilde{x}} \to T_{\pi(\tilde{x})}M$ é isometria linear, para todo $\tilde{x} \in \tilde{M}$.

(d) Seja γ uma geodésica em M. Pelo item (b), γ admite um levantamento horizontal $\tilde{\gamma}$ que, devido a completude de $\tilde{M}$, está definido em todo $\mathbb{R}$. Pelo item (c), segue que $\pi \circ \tilde{\gamma}$ é geodésica em M definida em todo $\mathbb{R}$ que, claramente, extende a geodésica γ, mostrando a completude de M. $\square$

2.4 Exercícios

2.1

1. Uma geodésica $\gamma : [0, +\infty] \to M$ em uma variedade Riemanniana M é um *raio partindo de* p se $\gamma(0) = p$ e $d(p, \gamma(t)) = t$, para todo $t \geq 0$. Mostre que toda variedade Riemanniana completa e não-compacta M contém um raio partindo de p, qualquer que seja o ponto $p \in M$.

2. Uma curva diferenciável $\gamma : [0, \infty] \to M$ em uma variedade Riemanniana M é dita ser *divergente* se, para todo compacto $K \subset M$, existe $t_0 \in (0, +\infty)$ tal que $\gamma(t) \notin K$, para todo $t > t_0$. Mostre que M é completa se, e somente se, o comprimento de qualquer curva divergente é ilimitado.

3. Considere uma variedade diferenciável M com a propriedade de que ela é completa em relação a qualquer métrica Riemanniana. Mostre, neste caso, que M deve ser compacta.

4. Mostre que toda variedade Riemanniana homogênea é completa.

5. Considere duas isometrias locais $f, g : M \to N$ entre variedades Riemannianas, onde M é conexa. Assuma que exista um ponto $p \in M$ tal que $f(p) = g(p)$ e $\mathrm{d}f(p) = \mathrm{d}g(p)$. Mostre que $f = g$.

2.2

1. Mostre que a aplicação $\pi : (-1, 1) \to \mathbb{S}^1$, definida por $\pi(t) = e^{2\pi i t}$, não é recobrimento.

2. Dado um recobrimento $\pi : \tilde{M} \to M$, mostre que $\pi(U)$ é aberto em M, qualquer que seja o aberto U em $\tilde{M}$. Em particular, π é um homeomorfismo se, e somente se, π é injetora.

3. Mostre que todo campo de Killing, definido numa variedade Riemanniana completa, é completo.

4. Se $\pi : \tilde{M} \to M$ é um difeomorfismo local, com $\tilde{M}$ compacta, mostre que π é recobrimento. O mesmo vale se $\tilde{M}$ for completa e não-compacta?

5. Seja $\pi : \tilde{M} \to M$ um difeomorfismo local tal que

$$\|\mathrm{d}\pi(\tilde{p}) \cdot v\| \geq \epsilon \|v\|,$$

para quaisquer $\tilde{p} \in \tilde{M}$ e $v \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$. Se $\tilde{M}$ é completa, mostre que π é recobrimento.

2.3

Dado uma submersão Riemanniana $\pi : \tilde{M} \to M$, considere a decomposição $T\tilde{M} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$ em termos das distribuições horizontal e vertical (cf. [10] para mais detalhes).

1. Um campo vetorial $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ é chamado *horizontal* se $\tilde{X}(\tilde{p}) \in \mathcal{H}_{\tilde{p}}$, para todo $\tilde{p} \in \tilde{M}$. Além disso, dizemos que $\tilde{X}$ é *básico* se $\tilde{X}$ é horizontal e π-relacionado a algum campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ são campos básicos, π-relacionados a $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, respectivamente, mostre que valem as seguintes propriedades:

(a) $\langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle = \langle X, Y \rangle \circ \pi$,

(b) $[\tilde{X}, \tilde{Y}]^{\mathcal{H}}$ é o campo básico, π-relacionado a $[X, Y]$,

(c) $\left(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}\right)^{\mathcal{H}}$ é o campo básico, π-relacionado a $\nabla_X Y$.

2. Dado um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, mostre que existe um único campo horizontal $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ que é π-relacionado a X; este campo vetorial $\tilde{X}$ é chamado o *levantamento horizontal* de X.

3. Um campo vetorial $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ é chamado *vertical* se $\tilde{X}(\tilde{p}) \in \mathcal{V}_{\tilde{p}}$, para todo $\tilde{p} \in \tilde{M}$. Dados $\tilde{X}, \tilde{V} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$, com $\tilde{X}$ básico e $\tilde{V}$ vertical, mostre que $[\tilde{X}, \tilde{V}]$ é um campo vertical.

4. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, sejam $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ seus levantamentos horizontais. Mostre que

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} = \widetilde{\nabla_X Y} + \frac{1}{2}[\tilde{X}, \tilde{Y}]^{\mathcal{V}}.$$

Capítulo 3

Curvaturas

3.1 O tensor de curvatura

Nesta seção introduziremos o conceito de curvatura seccional de uma variedade Riemanniana, generalizando a noção de curvatura Gaussiana para superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$.

Definição 3.1.1. A *curvatura* de uma variedade Riemanniana M é a aplicação $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ definida por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Segue da regra de Leibniz para a conexão ∇ que a curvatura R é uma aplicação $C^\infty(M)$-linear em cada uma das variáveis.

Exemplo 3.1.2. A curvatura no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ é identicamente nula. De fato, dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, e escrevendo $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$, temos:

$$\nabla_X \nabla_Y Z = \big(X(Y(Z_1)), \ldots, X(Y(Z_n))\big)$$

e

$$\nabla_Y \nabla_X Z = \big(Y(X(Z_1)), \ldots, Y(X(Z_n))\big),$$

implicando que $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z = 0$.

O resultado seguinte fornece as propriedades de simetria da aplicação R, que serão fundamentais no decorrer do capítulo.

Proposição 3.1.3. Valem as seguintes propriedades:

(i) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$,

(ii) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle R(X,Y)W, Z\rangle$,

(iii) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$,

(iv) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle$,

para quaisquer $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. A propriedade (i) segue diretamente da definição de R. O item (ii) é equivalente a $\langle R(X,Y)Z, Z\rangle = 0$, que passaremos a provar. Temos:

$$\langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z\rangle = X\langle \nabla_Y Z, Z\rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle,$$
$$\langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z\rangle = Y\langle \nabla_X Z, Z\rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Z Y\rangle$$

e

$$\langle \nabla_{[X,Y]} Z, Z\rangle = \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z, Z\rangle.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\langle R(X,Y)Z, Z\rangle &= X\langle \nabla_Y Z, Z\rangle - Y\langle \nabla_X Z, Z\rangle - \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z, Z\rangle \\
&= \frac{1}{2}X\big(Y\langle Z, Z\rangle\big) - \frac{1}{2}Y\big(X\langle Z, Z\rangle\big) - \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z, Z\rangle \\
&= \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z, Z\rangle - \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z, Z\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Para o item (iii), denotando por $S(X,Y,Z)$ a soma cíclica

$$S(X,Y,Z) = R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y,$$

temos:

$$\begin{aligned}
S(X,Y,Z) &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X \\
&\quad -\nabla_{[Y,Z]}X + \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]}Y \\
&= \nabla_X(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) - \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Y(\nabla_Z X - \nabla_X Z) \\
&\quad -\nabla_{[Y,Z]}X + \nabla_Z(\nabla_X Y - \nabla_Y X) - \nabla_{[Z,X]}Y \\
&= \nabla_X[Y,Z] - \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Y[Z,X] - \nabla_{[Y,Z]}X \\
&\quad +\nabla_Z[X,Y] - \nabla_{[Z,X]}Y \\
&= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, para o item (iv), usemos o item (iii) a fim de obter:

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle R(Y,Z)X,W\rangle + \langle R(Z,X)Y,W\rangle = 0,$$

$$\langle R(Y,Z)W,X\rangle + \langle R(Z,W)Y,X\rangle + \langle R(W,Y)Z,X\rangle = 0,$$

$$\langle R(Z,W)X,Z\rangle + \langle R(W,X)Z,Y\rangle + \langle R(X,Z)W,Y\rangle = 0,$$

$$\langle R(W,X)Y,Z\rangle + \langle R(X,Y)W,Z\rangle + \langle R(Y,W)X,Z\rangle = 0.$$

Somando, obtemos

$$\langle R(X,Z)W,Y\rangle + \langle R(W,Y)X,Z\rangle = 0,$$

como queríamos. □

A propriedade (iii) da Proposição 3.1.3 é conhecida como *primeira identidade de Bianchi.*

Observação 3.1.4. Dado uma carta local (U,φ) em torno de um ponto $p \in M$, com $\varphi \sim (x_1,\dots,x_n)$, seja

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{l=1}^{n} R_{ijk}^{l}\frac{\partial}{\partial x_l}.$$

Ou seja, R_{ijk}^{l} são as componentes da curvatura R na carta local (U,φ). Dados $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$, com

$$X|_U = \sum_{i=1}^{n} X_i\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y|_U = \sum_{j=1}^{n} Y_j\frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{e} \quad Z|_U = \sum_{k=1}^{n} Z_k\frac{\partial}{\partial x_k},$$

segue da linearidade que

$$R(X,Y)Z|_U = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} R_{ijk}^{l}X_iY_jZ_k\frac{\partial}{\partial x_l}. \tag{3.1}$$

A equação (3.1) mostra que o valor de $R(X,Y)Z$ no ponto $p \in M$ depende unicamente dos valores dos campos X, Y e Z em p e dos valores das funções R_{ijk}^{l} em p.

Definição 3.1.5. Dado um ponto $p \in M$, seja σ um subespaço 2-dimensional de T_pM. A *curvatura seccional* de σ em p é definida como o número real

$$K(\sigma) = K(X,Y) = -\frac{\langle R(X,Y)X,Y\rangle}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X,Y\rangle^2},$$

onde $\{X,Y\}$ é uma base para σ.

Um argumento simples de Álgebra Linear mostra que a expressão $K(\sigma)$ independe da escolha da base. Dizemos que uma variedade Riemanniana M tem *curvatura seccional constante* igual a c se para todo ponto $p \in M$ e todo subespaço 2-dimensonal σ de T_pM, a curvatura seccional de σ é igual a c.

O seguinte lema algébrico afirma que o conhecimento de $K(\sigma)$ determina completamente a curvatura R.

Lema 3.1.6. Seja V um espaço vetorial real, de dimensão $n \geq 2$, munido de um produto interno $\langle , \rangle$, e considere aplicações $R, R' : V \times V \times V \to V$ satisfazendo as propriedades (i)–(iv) da Proposição 3.1.3. Se σ é o plano gerado por dois vetores linearmente independentes $X, Y \in V$, escreva

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(X,Y)X, Y\rangle}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X,Y\rangle^2} \quad \text{e} \quad K'(\sigma) = \frac{\langle R'(X,Y)X, Y\rangle}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X,Y\rangle^2}.$$

Se $K(\sigma) = K'(\sigma)$, para todo subespaço 2-dimensional $\sigma \subset V$, então $R = R'$.

Demonstração. Cf. [1, Lema 4–3.3]. □

O resultado seguinte caracteriza as variedades Riemanninas de curvatura secional constante em termos das componentes de R.

Proposição 3.1.7. Uma variedade Riemanniana M tem curvatura secional constante igual a c se, e somente se,

$$R(X,Y)Z = c(X \wedge Y)Z, \tag{3.2}$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, onde $X \wedge Y$ denota o produto wedge de X e Y, dado por $(X \wedge Y)Z = \langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y$.

Demonstração. Suponha, inicialmente, que M tenha curvatura seccional constante igual a c, e considere a aplicação R' dada por

$$R'(X,Y)Z = (X \wedge Y)Z.$$

Observe que R' satisfaz as propriedades (i)–(iv) da Proposição 3.1.3. Além disso, como

$$\langle R'(X,Y)X, Y\rangle = \langle X,Y\rangle^2 - \|X\|^2\|Y\|^2,$$

temos que, para todo par de vetores $X, Y \in T_pM$,

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)X, Y\rangle &= -c\big(\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X,Y\rangle^2\big)\\ &= c\langle R'(X,Y)X, Y\rangle,\end{aligned}$$

e a equação (3.2) segue do Lema 3.1.6. Reciprocamente, se vale (3.2), é imediato que M tem curvatura seccional constante igual a c. □

Finalizaremos esta seção provando que a curvatura seccional generaliza a noção de curvatura Gaussiana de uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$.

Proposição 3.1.8. A curvatura seccional de uma superfície regular M em $\mathbb{R}^3$, munida da métrica induzida, coincide com sua curvatura Gaussiana.

Demonstração. Dado uma carta local (U, φ) em M, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^2$, denotemos por

$$\varphi_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \quad \text{e} \quad \varphi_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

os campos coordenados associados a φ, e por

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, \quad F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, \quad G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$$

os coeficientes da primeira forma fundamental de M, em relação à métrica induzida. Seja $N : M \to \mathbb{S}^2$ a aplicação de Gauss associada ao campo normal unitário

$$N = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|},$$

e considere os coeficientes da segunda forma fundamental

$$e = \langle \varphi_{uu}, N \rangle, \quad f = \langle \varphi_{uv}, N \rangle, \quad g = \langle \varphi_{vv}, N \rangle.$$

Usando os símbolos de Christoffel, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\varphi_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + eN, \\
\varphi_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + fN, \\
\varphi_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + gN.
\end{aligned}$$

A curvatura seccional de M é dada por

$$\begin{aligned}
K(\varphi_u, \varphi_v) &= -\frac{\langle R(\varphi_u, \varphi_v)\varphi_u, \varphi_v \rangle}{\|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2} \\
&= -\frac{\langle \nabla_{\varphi_u} \nabla_{\varphi_v} \varphi_u - \nabla_{\varphi_v} \nabla_{\varphi_u} \varphi_u, \varphi_v \rangle}{EG - F^2},
\end{aligned} \tag{3.3}$$

pois $[\varphi_u, \varphi_v] = 0$. Por outro lado, a conexão de Levi-Civita de M coincide com a componente tangente da conexão usual de $\mathbb{R}^3$. Assim,

$$\nabla_{\varphi_v} \varphi_u = (\varphi_{uv})^T = \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v,$$

logo

$$\begin{aligned}
\nabla_{\varphi_u}\nabla_{\varphi_v}\varphi_u &= \left[(\Gamma^1_{12})_u\varphi_u + \Gamma^1_{12}\varphi_{uu} + (\Gamma^2_{12})_u\varphi_v + \Gamma^2_{12}\varphi_{uv}\right]^T \\
&= \left[(\Gamma^1_{12})_u + \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12}\right]\varphi_u \\
&\quad + \left[(\Gamma^2_{12})_u + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + (\Gamma^2_{12})^2\right]\varphi_v.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Analogamente, obtemos:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\varphi_v}\nabla_{\varphi_u}\varphi_u &= \left[(\Gamma^1_{11})_v + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22}\right]\varphi_u \\
&\quad + \left[(\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}\right]\varphi_v.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Substituindo (3.4) e (3.5) em (3.3), segue das fórmulas (5) e (5a) de [2, Section 4.3] que $K(\varphi_u, \varphi_v)$ coincide com a curvatura Gaussiana de M. □

3.2 O Lema de Schur

Nesta seção provaremos o Lema de Schur como uma aplicação do conceito de derivada covariante de tensores.

Um *tensor do tipo* $(0, r)$ em uma variedade Riemanniana M é uma aplicação $C^\infty(M)$-multilinear

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M),$$

onde o produto acima tem r fatores. Um *tensor do tipo* $(1, r)$ em M é uma aplicação $C^\infty(M)$-multilinear

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M).$$

Exemplo 3.2.1. A métrica $\langle , \rangle$ de uma variedade Riemanniana M pode ser vista como um tensor do tipo $(0, 2)$

$$T(X, Y) = \langle X, Y \rangle.$$

A curvatura R de M é um tensor do tipo $(1, 3)$,

$$T(X, Y, Z) = R(X, Y)Z.$$

No entanto, a conexão de Levi-Civita de M não é um tensor do tipo $(1, 2)$, pois

$$T(X, Y) = \nabla_X Y$$

não é $C^\infty(M)$-linear na variável Y.

Definição 3.2.2. A *diferencial covariante* de um tensor do tipo $(0,r)$ (resp. do tipo $(1,r)$) T, denotada por ∇T, é um tensor do tipo $(0,r+1)$ (resp. do tipo $(1,r+1)$) dado por

$$\nabla T(X_1,\ldots,X_r,Z) = \nabla_Z(T(X_1,\ldots,X_r)) - \sum_{i=1}^{r} T\left(X_1,\ldots,\nabla_Z X_i,\ldots,X_r\right).$$

Para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$, a *derivada covariante* $\nabla_Z T$ do tensor T em relação Z é também um tensor do mesmo tipo de T dado por

$$\nabla_Z T(X_1,\ldots,X_r) = \nabla T(X_1,\ldots,X_r,Z).$$

Exemplo 3.2.3. Se T é o tensor métrico $T(X,Y) = \langle X,Y\rangle$, então $\nabla T = 0$. De fato,

$$\begin{aligned}\nabla T(X,Y,Z) &= Z(T(X,Y)) - T(\nabla_Z X,Y) - T(X,\nabla_Z Y)\\ &= Z\langle X,Y\rangle - \langle\nabla_Z X,Y\rangle - \langle X,\nabla_Z Y\rangle = 0.\end{aligned}$$

Exemplo 3.2.4. Podemos identificar um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ com o tensor $X : \mathfrak{X}(M) \to \mathrm{C}^\infty(M)$ dado por

$$X(Y) = \langle X,Y\rangle.$$

Então, a derivada covariante do tensor X em relação a um campo vetorial $Z \in \mathfrak{X}(M)$ é dada por

$$\begin{aligned}\nabla_Z X(Y) &= \nabla X(Y,Z) = Z(X(Y)) - X(\nabla_Z Y)\\ &= Z\langle X,T\rangle - \langle X,\nabla_Z Y\rangle = \langle\nabla_Z X,Y\rangle.\end{aligned}$$

Como Y é arbitrário, o tensor $\nabla_Z X$ pode ser identificado ao vetorial $\nabla_Z X$.

Segue do Exemplo 3.2.4 que a derivada covariante de tensores é uma generalização da derivada covariante de campos vetoriais.

Exemplo 3.2.5. Dado uma função $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$, definimos a *Hessiana* de f, denotada por $\operatorname{Hess} f$, como o tensor do tipo $(1,1)$

$$\operatorname{Hess} f = \nabla(\nabla f),$$

onde ∇f denota o gradiente de f. A Hessiana é um operador simétrico. De fato,

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{Hess} f(X), Y\rangle &= \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle = X\langle \nabla f, Y\rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y\rangle \\
&= X(Y(f)) - \langle \nabla f, \nabla_Y X + [X,Y]\rangle \\
&= Y(X(f)) + [X,Y](f) - \langle \nabla f, \nabla_Y X + [X,Y]\rangle \\
&= Y(X(f)) - \langle \nabla f, \nabla_Y X\rangle \\
&= \langle \nabla_Y \nabla f, X\rangle \\
&= \langle X, \operatorname{Hess} f(Y)\rangle,
\end{aligned}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Assim, $\operatorname{Hess} f$ pode também ser identificado com o tensor do tipo $(0,2)$

$$\operatorname{Hess} f(X,Y) = \langle \operatorname{Hess} f(X), Y\rangle.$$

Proposição 3.2.6 (Segunda identidade de Bianchi)**.** Para quaisquer campos vetoriais $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, vale a relação

$$\nabla_X R(Y,Z)W + \nabla_Y R(Z,X)W + \nabla_Z R(X,Y)W = 0. \tag{3.6}$$

Demonstração. Por definição, temos:

$$\begin{aligned}
\nabla_X R(Y,Z)W &= \nabla_X(R(Y,Z)W) - R(\nabla_X Y, Z)W - R(Y, \nabla_X Z)W \\
&\quad -R(Y,Z)\nabla_X W.
\end{aligned}$$

Omitindo o campo W acima e usando a identidade

$$R(X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]},$$

temos

$$\begin{aligned}
\nabla_X R(Y,Z) =&[\nabla_X, R(Y,Z)] - R(\nabla_X Y, Z) - R(Y, \nabla_X Z) \\
=&[\nabla_X, [\nabla_Y, \nabla_Z]] - [\nabla_X, \nabla_{[Y,Z]}] - R(\nabla_X Y, Z) - R(Y, \nabla_X Z) \\
=&[\nabla_X, [\nabla_Y, \nabla_Z]] - \nabla_{[X,[Y,Z]]} - R(X,[Y,Z]) \\
&- R(\nabla_X Y, Z) - R(Y, \nabla_X Z).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Analogamente obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla_Y R(Z,X) =&[\nabla_Y, [\nabla_Z, \nabla_X]] - \nabla_{[Y,[Z,X]]} - R(Y,[Z,X]) \\
&- R(\nabla_Y Z, X) - R(Z, \nabla_Y X)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

e

$$\begin{aligned}\nabla_Z R(X,Y) =&[\nabla_Z,[\nabla_X,\nabla_Y]] - \nabla_{[Z,[X,Y]]} - R(Z,[X,Y]) \\ &- R(\nabla_Z X, Y) - R(X,\nabla_Z Y).\end{aligned} \tag{3.9}$$

A fim de obter (3.6), basta somar (3.7), (3.8) e (3.9). $\square$

Definição 3.2.7. Dizemos que uma variedade Riemanniana M tem *curvatura isotrópica* em um ponto $p \in M$ se $K(\sigma) = K_p$, para todo subespaço 2-dimensional $\sigma \subset T_pM$, onde K_p é uma constante.

Estamos agora em condições de provar o resultado principal dessa seção.

Teorema 3.2.8 (Lema de Schur)**.** *Se uma variedade Riemanniana conexa M^n, com $n \geq 3$, tem curvatura isotrópica em todos os pontos, então M tem curvatura constante.*

Demonstração. Considere a função $K : M \to \mathbb{R}$ dada pelas curvaturas seccionais, ou seja, $K(p) = K_p$, para todo $p \in M$. Pela Proposição 3.1.7, temos que

$$R(X,Y)Z = K(X \wedge Y)Z, \tag{3.10}$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Derivando (3.10) em relação a X, obtemos

$$\nabla_X R(Y,Z)W = X(K)(Y \wedge Z)W + K\nabla_X(Y \wedge Z)W.$$

Somando sobre a permutação cíclica de (X, Y, Z) e usando a Proposição (3.2.6), obtemos:

$$X(K)(Y \wedge Z)W + Y(K)(Z \wedge X)W + Z(L)(X \wedge Y)W = 0. \tag{3.11}$$

Fixe X arbitrário. Como $n \geq 3$, é possível escolher Y, Z tais que $\{X, Y, Z\}$ seja ortonormal. Fazendo $W = Z$ em (3.11), obtemos $X(K) = 0$. A conexidade de M implica que $K = const$ em M. $\square$

3.3 A curvatura de Ricci

Definição 3.3.1. A *curvatura de Ricci* de uma variedade Riemanniana M^n em um ponto $p \in M$ é a aplicação bilinear $Ric : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$Ric(X,Y) = -\mathrm{trace}\{Z \mapsto R(X,Z)Y\}.$$

Observe que, em virtude da Proposição 3.1.3, temos

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= -\sum_{i=1}^{n}\langle R(X,e_i)Y,e_i\rangle = -\sum_{i=1}^{n}\langle R(Y,e_i)X,e_i\rangle \\ &= Ric(Y,X), \end{aligned}$$

onde $\{e_1,\dots e_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM. Ou seja, Ric é uma aplicação bilinear simétrica. Disso decorre que o tensor de Ricci é do mesmo tipo que o tensor métrico $\langle,\rangle$ e, assim, faz sentido compará-los.

Definição 3.3.2. Uma *variedade Einstein* é uma variedade Riemanniana M cujo tensor de Ricci é proporcional ao tensor métrico, i.e., existe uma função $\lambda \in \mathrm{C}^{\infty}(M)$ tal que

$$Ric(X,Y) = \lambda(p)\langle X,Y\rangle,$$

para quaisquer $p \in M$ e $X,Y \in T_pM$.

A função λ é usualmente chamada a *constante de Einstein*.

Exemplo 3.3.3. Se M^n é uma variedade Riemanniana de curvatura constante igual a c, então M é também uma variedade Einstein com $\lambda = c(n-1)$. De fato, dados $p \in M$ e $\{e_1,\dots,e_n\} \subset T_pM$ uma base ortonormal, temos:

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= -\sum_{i=1}^{n}\langle R(X,e_i)Y,e_i\rangle = -c\sum_{i=1}^{n}\langle (X\wedge e_i)Y,e_i\rangle \\ &= -c\sum_{i=1}^{n}\big(\langle X,e_i\rangle\langle Y,e_i\rangle - \langle X,Y\rangle\langle e_i,e_i\rangle\big) \\ &= c(n-1)\langle X,Y\rangle, \end{aligned}$$

como queríamos.

A Proposição seguinte estabelece que, no caso de dimensão 3, a recíproca do Exemplo 3.3.3 também é verdadeira.

Proposição 3.3.4. Se M é uma variedade Einstein conexa, de dimensão igual a 3, então M tem curvatura seccional constante.

Demonstração. Dados um ponto $p \in M$ e um subespaço 2-dimensional σ de T_pM, sejam $\{e_1,e_2\}$ uma base ortonormal de σ e $e_3 \in T_pM$ tal que $\{e_1,e_2,e_3\}$ seja um conjunto ortonormal. Denotando por

$$K_{ij} = K_{ji} = -\langle R(e_i,e_j)e_i,e_j\rangle,$$

temos

$$\begin{aligned} Ric(e_1, e_1) &= K_{12} + K_{13}, \\ Ric(e_2, e_2) &= K_{21} + K_{23}, \\ Ric(e_3, e_3) &= K_{31} + K_{32}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Segue de (3.12) que

$$Ric(e_1, e_1) + Ric(e_2, e_2) - Ric(e_3, e_3) = 2K_{12}.$$

Como $Ric(e_i, e_i) = \lambda$, concluimos que $K_{12} = \frac{1}{2}\lambda$. A conclusão segue agora do Exercício 1. $\square$

3.4 Exercícios

3.1

1. Sejam G um grupo de Lie, munido de uma métrica bi-invariante, e $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(G)$ campos vetoriais unitários e invariantes à esquerda em G.

(i) Mostre que $R(X,Y)Z = \frac{1}{4}[[X,Y],Z]$.

(ii) Mostre que, se X e Y são ortonormais, a curvatura seccional do plano gerado por X e Y é dada por

$$K(X,Y) = \frac{1}{4}\|[X,Y]\|^2.$$

3.3

1. Seja M^n uma variedade Einstein conexa, com $n \geq 3$. Mostre que a constante de Einstein é uma função constante em M.

Capítulo 4

Cálculo Variacional

4.1 O funcional energia

Nesta seção apresentaremos uma caracterização das geodésicas como soluções de um problema variacional.

Definição 4.1.1. Dado uma variedade Riemanniana M, definimos a *energia* de uma curva diferenciável por partes $\gamma : [a,b] \to M$ como sendo o número real $E(\gamma)$ dado por

$$E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b \|\gamma'(t)\|^2 \mathrm{d}t. \tag{4.1}$$

Note que, ao contrário do que ocorre com o comprimento $L(\gamma)$ da curva γ, a energia $E(\gamma)$ não é invariante sob reparametrizações da curva.

Uma *variação* de uma curva diferenciável por partes $\gamma : [a,b] \to M$ é uma aplicação contínua $\phi : [a,b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tal que $\phi(t,0) = \gamma(t)$, para todo $t \in [a,b]$, e existe uma partição

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k = b$$

de $[a,b]$ tal que $\phi|_{[t_{i-1},t_i]\times(-\epsilon,\epsilon)}$ é diferenciável, para todo $1 \leq i \leq k$.

Definição 4.1.2. Dado uma variação $\phi : [a,b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ de uma curva diferenciável por partes $\gamma : [a,b] \to M$, o *funcional energia* de γ associado a ϕ é a função $E : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ definida por

$$E(s) = \int_a^b \left\|\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,s)\right\|^2 \mathrm{d}t.$$

As *curvas da variação* de ϕ são as curvas

$$t \in [a,b] \mapsto \phi_s(t) = \phi(t,s) \in M,$$

que são diferenciáveis por partes em M. Uma variação $\phi : [a,b]\times(-\epsilon,\epsilon) \to M$ de uma curva diferenciável por partes $\gamma : [a,b] \to M$ é dita ser *própria* se

$$\phi(a,s) = \gamma(a) \quad \text{e} \quad \phi(b,s) = \gamma(b),$$

para todo $s \in (-\epsilon,\epsilon)$. A variação é dita *diferenciável* se ϕ for uma aplicação diferenciável. Finalmente, dizemos que ϕ é uma *variação geodésica* se for diferenciável e se todas as curvas da variação ϕ_s são geodésicas de M.

Fixados dois pontos $p, q, \in M$, denote por $\Omega(p,q)$ o espaço das curvas diferenciáveis por partes ligando p e q, e considere em $\Omega(p,q)$ o seguinte problema variacional: encontrar as curvas em $\Omega(p,q)$ que minimizam a energia. Se uma tal curva $\gamma : [a,b] \to M$ existir, sendo $\phi : [a,b] \times (-\epsilon,\epsilon) \to M$ uma variação própria de γ e E o funcional energia associado a ϕ, devemos ter

$$E(0) \leq E(s),$$

para todo $s \in (-\epsilon,\epsilon)$, de modo que $E'(0) = 0$. Assim, uma condição necessária para que $\gamma \in \Omega(p,q)$ seja solução do problema variacional proposto é que γ seja ponto crítico do funcional energia associado a toda variação própria de γ.

Veremos a seguir que tais pontos críticos são, precisamente, as geodésicas de M pertecentes ao espaço $\Omega(p,q)$. Disso seguirá que as geodésicas minimizantes de M em $\Omega(p,q)$ serão as soluções do problema proposto.

A fim de decidir se uma geodésica $\gamma \in \Omega(p,q)$ é ou não solução do problema variacional proposto, estudaremos a segunda variação $E''(0)$ do funcional energia associado a cada variação própria de γ. Caso $E''(0) \geq 0$ para toda tal variação, γ é candidato à solução do problema. Veremos que, para variações próprias, o valor $E''(0)$ depende somente do campo variacional V associado à variação.

Seja $\phi : [a,b] \times (-\epsilon,\epsilon) \to M$ uma variação de uma curva diferenciável por partes $\gamma : [a,b] \to M$. Desde que

$$s \in (-\epsilon,\epsilon) \mapsto \phi(t,s) \in M$$

é, para cada $t \in [a,b]$, uma curva diferenciável em M, fica bem definido o campo vetorial ao longo de γ

$$V(t) = \frac{\partial \phi}{\partial s}(t,0),$$

chamado o *campo variacional* de ϕ. Note que V é diferenciável por partes ao longo de γ.

Vimos acima que a toda variação de uma curva diferenciável por partes $\gamma : [a,b] \to M$ está associado um campo vetorial V ao longo de γ. O resultado seguinte afirma que, em um sentido apropriado, a recíproca também é verdadeira.

Lema 4.1.3. Sejam $\gamma : [a,b] \to M$ uma curva diferenciável por partes e V um campo diferenciável por partes ao longo de γ. Então, existem $\epsilon > 0$ e uma variação $\phi : [a,b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ de γ tal que V é o campo variacional de ϕ. Além disso, se $V(a) = V(b) = 0$, então podemos considerar ϕ como uma variação própria de γ.

Demonstração. Para cada $t \in [a,b]$, sejam W_t uma vizinhança totalmente normal do ponto $\gamma(t)$ e $\delta_t > 0$ tais que, para cada ponto $p \in W_t$, $\exp_p$ é um difeomorfismo em $B(0_p, \delta_t)$ e $W_t \subset \exp_p(B(0_p, \delta_t))$. Como $\gamma([a,b]) \subset M$ é compacto, existem $a = t_1 < t_2 < \ldots < t_{k-1} < t_k = b$ tais que

$$\gamma([a,b]) \subset W_{t_1} \cup \ldots \cup W_{t_k}.$$

Se $\delta = \min\{\delta_{t_1}, \ldots, \delta_{t_k}\}$, então $\exp_{\gamma(t)}(v)$ está definida para todo $v \in T_{\gamma(t)}M$, com $\|v\| < \delta$, e todo $t \in [a,b]$. Sejam

$$\mu = \max\{\|V(t)\| : t \in [a,b]\} \quad \text{e} \quad 0 < \epsilon < \delta/\mu.$$

Assim, a aplicação $\phi : [a,b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ dada por

$$\phi(t,s) = \exp_{\gamma(t)}\big(sV(t)\big)$$

está bem definida e é diferenciável por partes. Além disso, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial s}(t,0) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big(\exp_{\gamma(t)}\big(sV(t)\big)\Big)|_{s=0} \\ &= \mathrm{d}\exp_{\gamma(t)}(0) \cdot V(t) = V(t), \end{aligned}$$

de modo que V é o campo variacional de ϕ. Finalmente, se $V(a) = 0$ então

$$\phi(a,s) = \exp_{\gamma(a)}(0) = \gamma(a),$$

para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Analogamente, $V(b) = 0$ nos dá $\phi(b,s) = \gamma(b)$, para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, como queríamos. $\square$

Proposição 4.1.4 (Fórmula da primeira variação da energia)**.** Considere uma curva diferenciável por partes $\gamma : [a, b] \to M$ e $\phi : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ uma variação de γ com campo variacional V. Se E é o funcional energia associado a ϕ, então

$$\frac{1}{2}E'(0) = -\int_a^b \left\langle V(t), \frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \right\rangle \mathrm{d}t - \sum_{i=0}^{k} \left\langle V(t_i), \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t_i^+) - \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t_i^-) \right\rangle, \quad (4.2)$$

onde $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k = b$ são tais que $\phi|_{[t_{i-1}, t_i] \times (-\epsilon, \epsilon)}$ é diferenciável, para todo $1 \leq i \leq k$, as parcelas correspondentes a $i = 0$ e $i = k$ na soma do segundo membro são iguais a $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(a)$ e $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(b)$, respectivamente, e

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t_i^{\pm}) = \lim_{t \to t_i^{\pm}} \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t).$$

Demonstração. Por definição do funcional energia, temos

$$E(s) = \int_a^b \left\| \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, s) \right\|^2 \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle \mathrm{d}t.$$

Para cada $t \in [a, b]$ fixado, a função

$$s \in (-\epsilon, \epsilon) \mapsto \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle (t, s)$$

é diferenciável em s. Assim, segue da regra de Leibniz de derivação sob o sinal da integral e da simetria da conexão de Levi-Civita que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle \mathrm{d}t &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{D}{\mathrm{d}s}\frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle \mathrm{d}t \\
&= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle \mathrm{d}t \\
&= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle \right] \mathrm{d}t \\
&= \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle \Bigg|_{t_i}^{t_{i+1}} - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}s}(s) = -\int_a^b \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle \mathrm{d}t + \sum_{i=0}^{k} \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle \Bigg|_{t_i}^{t_{i+1}} \quad (4.3)$$

Fazendo $s = 0$ em (4.3), obtemos a fórmula (4.2). $\square$

Teorema 4.1.5 (Pontos críticos de E). *Uma curva diferenciável por partes $\gamma : [a, b] \to M$ é uma geodésica em M se, e somente se, γ é ponto crítico do funcional energia E, qualquer que seja a variação própria de γ.*

Demonstração. Suponha, inicialmente, que γ é geodésica em M. Assim, γ é uma curva regular e $\frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\gamma}{\partial t} = 0$. Além disso, como a variação ϕ é própria, tem-se $V(a) = V(b) = 0$, logo todos os termos de (4.2) são nulos, implicando $E'(0) = 0$. Reciprocamente, suponha $E'(0) = 0$, para toda variação própria ϕ de γ. Sejam

$$a < t_1 < \ldots < t_{k-1} < b$$

os pontos onde γ não é diferenciável em $[a, b]$. Faça $t_0 = a$, $t_k = b$, e considere uma função diferenciável por partes $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$g(t) = \begin{cases} > 0, & \text{se} \quad t \neq t_i \\ = 0, & \text{se} \quad t = t_i \end{cases}.$$

Pelo Lema 4.1.3, existe uma variação própria de γ com campo variacional

$$V(t) = g(t)\frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\gamma}{\partial t}.$$

Aplicando a fórmula (4.2) a tal variação e usando a hipótese, obtemos:

$$0 = \frac{1}{2}E'(0) = -\int_a^b g(t)\left\|\frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right\|^2 \mathrm{d}t,$$

donde $\frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\gamma}{\partial t} = 0$ no intervalo (t_i, t_{i+1}), para todo $1 \leq i \leq k$, i.e., γ é geodésica em cada um destes subintervalos. A fim de investigar o que ocorre nos pontos t_i da partição de $[a, b]$, considere um campo diferenciável por partes ao longo de γ, com $V(a) = V(b) = 0$ e

$$V(t_i) = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t_i^+) - \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t_i^-),$$

para todo $1 \leq i \leq k$. Tal campo pode ser construído da seguinte forma: no intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, sejam V_i e V_{i+1} os transportes paralelos de

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t_i^+) - \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t_i^-) \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t_{i+1}^+) - \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t_{i+1}^-),$$

respectivamente. Se $\eta : [t_i, t_{i+1}] \to [0, 1]$ é uma função diferenciável tal que $\eta(t_i) = 0$ e $\eta(t_{i+1}) = 1$, defina V em $[t_i, t_{i+1}]$ pondo

$$V = (1 - \eta)V_i + \eta V_{i+1}.$$

Considere, novamente pelo Lema 4.1.3, uma variação própria ϕ de γ com campo variacional V. Aplicando a fórmula (4.2), obtemos

$$0 = \frac{1}{2}E'(0) = -\sum_{i=1}^{k-1} \left\| \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t_i^+) - \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t_i^- \right\|^2,$$

de onde segue que γ é de classe C^1 em $[a,b]$. Se mostrarmos que $\frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\gamma}{\partial t}$ existe e é igual a 0, para todo $1 < i < k$, seguirá que γ satisfaz a equação das geodésicas em $[a,b]$ e, assim, a unicidade das soluções de EDO's garantirá que γ é de classe C^∞ em $[a,b]$. Para isso, seja $\{e_1(t),\dots,e_n(t)\}$ uma base ortonormal de campos paralelos ao longo de γ, e escreva

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} a_j(t)e_j(t).$$

Então, $a_j'(t) = 0$ para todo $1 \leq j \leq n$ e todos $t \neq t_i$, com $1 \leq i < k$. Mas como as funções a_i são contínuas em $[a,b]$, seque que elas são todas constantes em $[a,b]$, e isso conclui a demonstração. $\square$

Proposição 4.1.6 (Fórmula da segunda variação da energia)**.** Dado uma geodésica $\gamma : [a,b] \to M$, considere uma variação $\phi : [a,b]\times(-\epsilon,\epsilon) \to M$ de γ com campo variacional V. Se E é o funcional energia associado a ϕ, então

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}E''(0) = \int_a^b \big(\langle V',V'\rangle + \langle R(\gamma',V)\gamma',V\rangle\big)\,\mathrm{d}t \\ + \left\langle \frac{D}{\mathrm{d}s}\frac{\partial\phi}{\partial s},\gamma'\right\rangle(b,0) - \left\langle \frac{D}{\mathrm{d}s}\frac{\partial\phi}{\partial s},\gamma'\right\rangle(a,0)\end{aligned} \tag{4.4}$$

Demonstração. Seja

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k = b$$

uma partição do intervalo $[a,b]$ tal que $\phi|_{[t_{i-1},t_i]\times(-\epsilon,\epsilon)}$ é diferenciável, para todo $1 \leq i \leq k$. Derivando a fórmula (4.3), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}E''(s) &= \sum_{i=0}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{D}{\mathrm{d}s}\frac{\partial\phi}{\partial s}, \frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right\rangle \mathrm{d}t - \sum_{i=1}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial s}, \frac{D}{\mathrm{d}s}\frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right\rangle \mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{k-1}\left\langle \frac{D}{\mathrm{d}s}\frac{\partial\phi}{\partial s}, \frac{\partial\phi}{\partial t}\right\rangle\Bigg|_{t_i}^{t_{i+1}} + \sum_{i=1}^{k-1}\left\langle \frac{\partial\phi}{\partial s}, \frac{D}{\mathrm{d}s}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right\rangle\Bigg|_{t_i}^{t_{i+1}}.\end{aligned}$$

Para $s=0$ temos $\frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$, logo o primeiro termo acima é nulo. Além disso, em $s=0$, $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ é contínua, logo o terceiro termo acima torna-se

$$\sum_{i=1}^{k-1}\left\langle\frac{D}{\mathrm{d}s}\frac{\partial\phi}{\partial s},\frac{\partial\phi}{\partial t}\right\rangle\Big|_{t_i}^{t_{i+1}}=\left\langle\frac{D}{\mathrm{d}s}\frac{\partial\phi}{\partial s},\gamma'\right\rangle(b,0)-\left\langle\frac{D}{\mathrm{d}s}\frac{\partial\phi}{\partial s},\gamma'\right\rangle(a,0).$$

Finalmente, também para $s=0$, usando a simetria da conexão e o Exercício **??.??**, o segundo e quarto membros acima, somados, valem:

$$\begin{aligned}
&-\sum_{i=1}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left\langle\frac{\partial\phi}{\partial s},\frac{D}{\mathrm{d}s}\frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right\rangle\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{k-1}\left\langle\frac{\partial\phi}{\partial s},\frac{D}{\mathrm{d}s}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right\rangle\Big|_{t_i}^{t_{i+1}}\\
=&\;-\sum_{i=1}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left\langle\frac{\partial\phi}{\partial s},\frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{D}{\mathrm{d}s}\frac{\partial\phi}{\mathrm{d}t}+R\left(\frac{\partial\phi}{\partial s},\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\frac{\partial\phi}{\partial t}\right\rangle\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{k-1}\left\langle\frac{\partial\phi}{\partial s},\frac{D}{\mathrm{d}s}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right\rangle\Big|_{t_i}^{t_{i+1}}\\
=&\;-\sum_{i=1}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle\frac{\partial\phi}{\partial s},\frac{D}{\mathrm{d}s}\frac{\partial\phi}{\mathrm{d}t}\right\rangle-\left\langle\frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\phi}{\mathrm{d}s},\frac{D}{\mathrm{d}s}\frac{\partial\phi}{\mathrm{d}t}\right\rangle\right)\mathrm{d}t\\
&\;-\sum_{i=1}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left\langle R\left(\frac{\partial\phi}{\partial s},\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\frac{\partial\phi}{\partial t},\frac{\partial\phi}{\partial s}\right\rangle\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{k-1}\left\langle\frac{\partial\phi}{\partial s},\frac{D}{\mathrm{d}s}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right\rangle\Big|_{t_i}^{t_{i+1}}\\
=&\;\int_a^b\big(\langle V',V'\rangle+\langle R(\gamma',V)\gamma',V\rangle\big)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

e isso prova a fórmula (4.4). □

Corolário 4.1.7. Se a variação ϕ é própria, então

$$\frac{1}{2}E''(0)=\int_a^b\big(\langle V',V'\rangle+\langle R(\gamma',V)\gamma',V\rangle\big)\,\mathrm{d}t \tag{4.5}$$

Decorre da fórmula (4.5) que o valor $E''(0)$ depende somente do campo variacional V associado à variação própria ϕ.

4.2 Campos de Jacobi

Nesta seção estudaremos uma classe de campos vetoriais ao longo de geodésicas, definidos através de uma equação diferencial, e que surgem naturalmente no estudo das variações da energia.

Dado uma geodésica $\gamma:[0,a]\to M$, a fórmula da segunda variação da energia (4.4) define uma forma quadrática no espaço dos campos vetoriais ao longo de γ e que se anulam nas extremidades $t = 0$ e $t = a$, cuja forma bilinear simétrica associada I, chamada a *forma do índice de* γ, é dada por

$$I(X, Y) = \int_0^a \big(\langle X', Y'\rangle + \langle R(\gamma', X)\gamma', Y\rangle\big)\,\mathrm{d}t. \tag{4.6}$$

Dados dois campos diferenciáveis por partes X e Y ao longo de γ, seja

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k = a$$

uma partição de $[0, a]$ tal que X e Y são diferenciáveis em $[t_{i-1}, t_i]$, para todo $1 \leq i \leq k$. Como $\langle X', Y'\rangle = \langle X', Y\rangle' - \langle X'', Y\rangle$ em cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$, podemos escrever

$$\begin{aligned} I(X, Y) &= \int_0^a \big(\langle X', Y\rangle' - \langle X'', Y\rangle + \langle R(\gamma', X)\gamma', Y\rangle\big)\,\mathrm{d}t \\ &= -\sum_{i=0}^{k} \big\langle X'(t_i^+) - X'(t_i^-), Y\big\rangle + \int_0^a \big\langle -X'' + R(\gamma', X)\gamma', Y\big\rangle\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Definição 4.2.1. Um *campo de Jacobi ao longo de* γ é um campo vetorial diferenciável X ao longo de γ que satisfaz

$$X'' + R(\gamma', X)\gamma' = 0. \tag{4.7}$$

A equação (4.7) é chamada a *equação de Jacobi ao longo de* γ. O conjunto de todos os campos de Jacobi ao longo de γ, que será denotado por $\mathcal{J}_\gamma$, é um espaço vetorial real de dimensão $2n$, como mostra o resultado seguinte.

Lema 4.2.2. Dado uma geodésica $\gamma : [0, a] \to M$ em M, a aplicação

$$T : \mathcal{J}_\gamma \to T_{\gamma(0)}M \times T_{\gamma(0)}M$$

dada por

$$T(X) = \left(X(0), \frac{DX}{\mathrm{d}t}(0)\right),$$

é um isomorfismo linear.

Demonstração. Dado uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $T_{\gamma(0)}M$, extenda esta base a um referencial ortonormal $\{E_1, \ldots, E_n\}$ de campos vetoriais paralelos ao longo de γ. Dado um campo diferenciável X ao longo de γ, escrevamos

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i E_i,$$

onde $f_i : [0,a] \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis. A equação de Jacobi (4.7) para o campo X é

$$\sum_{i=1}^{n} \left(f_i'' E_i + f_i R(\gamma', E_i)\gamma' \right) = 0.$$

Tomando o produto interno em ambos os lados com E_j, obtemos:

$$f_j'' + \sum_{i=1}^{n} \langle R(\gamma', E_i)\gamma', E_j \rangle f_i = 0,$$

para todo $1 \leq j \leq n$. Este é um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem, logo seu espaço de soluções é um espaço vetorial real de dimensão $2n$, de modo que

$$f_i(t) \mapsto (f_i(0), f_i'(0))$$

é um isomorfismo linear, como queríamos. □

Decorre do Lema 4.2.2 que um campo de Jacobi X fica plenamente determinado pelos valores $X(0)$ e $X'(0)$. O resultado seguinte fornece uma interpretação variacional dos campos de Jacobi.

Proposição 4.2.3. Seja $\gamma : [0,a] \to M$ uma geodésica em M. Um campo diferenciável X ao longo de γ é um campo de Jacobi se, e somente se, X for o campo variacional de uma variação por geodésicas de γ.

Demonstração. Sejam $\phi : [0,a] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ uma variação por geodésicas de γ e $V(t) = \frac{\partial \phi}{\partial s}(t,0)$ o campo variacional associado a ϕ. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{D^2 V}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \phi}{\partial s}(t,0) = \frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{D}{\mathrm{d}s}\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,0) \\
&= \frac{D}{\mathrm{d}s}\frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,0) + R\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial s}\right)\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,0) \\
&= \frac{D}{\mathrm{d}s}\frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,0) + R(\gamma'(t), V(t))\gamma'(t).
\end{aligned}$$

Como ϕ_s é geodésica, para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, tem-se $\frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$, para quaisquer $t \in [0,a]$ e $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Em particular, o penúltimo termo acima é igual a zero e $V(t)$ satisfaz a equação de Jacobi (4.7). Reciprocamente, dado um campo de Jacobi X ao longo de γ, considere uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tal que

$$\alpha(0) = \gamma(0) \quad \text{e} \quad \alpha'(0) = X(0),$$

e seja Z um campo diferenciável ao longo de α tal que

$$Z(0) = \gamma'(0) \quad \text{e} \quad Z'(0) = X'(0).$$

Diminuindo $\epsilon > 0$, se necessário, defina uma aplicação $\phi : [0,a]\times(-\epsilon,\epsilon) \to M$ pondo

$$\phi(t,s) = \exp_{\alpha(s)}(tZ(s)).$$

Por construção, ϕ é uma variação por geodésicas de γ. Além disso, o campo

$$\tilde{X}(t) = \frac{\partial \phi}{\partial s}(t,0)$$

é, pela primeira parte, um campo de Jacobi ao longo de γ. Afirmamos que $\tilde{X} = X$. De fato, em virtude do Lema 4.2.2, basta mostrar que $\tilde{X}(0) = X(0)$ e $\tilde{X}'(0) = X'(0)$. Note que

$$\begin{aligned} \phi(t,0) &= \exp_{\alpha(0)}(tZ(0)) = \exp_{\gamma(0)}(t\gamma'(0)) \\ &= \gamma(t). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{X}(0) &= \frac{\partial \phi}{\partial s}(0,0) = \frac{\partial \phi}{\partial s}(0,s)\Big|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\alpha(s)\Big|_{s=0} \\ &= \alpha'(0) = X(0) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{X}'(0) &= \frac{D\tilde{X}}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \phi}{\partial s}(0,0) = \frac{D}{\mathrm{d}s}\frac{\partial \phi}{\partial t}(0,s)\Big|_{s=0} \\ &= \frac{D}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}\exp_{\alpha(s)}(0)\cdot Z(s)\Big|_{s=0} = \frac{D}{\mathrm{d}s}Z(s)\Big|_{s=0} \\ &= Z'(0) = X'(0), \end{aligned}$$

como queríamos. $\square$

Corolário 4.2.4. Se X é um campo de Jacobi ao longo da geodésica $\gamma : [0,a] \to M$, com $X(0) = 0$, então

$$X(t) = \mathrm{d}\exp_{\gamma(0)}(t\gamma'(0))\cdot(tX'(0)),$$

para todo $t \in [0,a]$.

Demonstração. Nas notações da Proposição 4.2.3, quando $X(0) = 0$ podemos considerar a curva constante $\alpha(s) = \gamma(0)$, para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, de modo que Z pode ser visto como uma curva em $T_{\gamma(0)}M$, com

$$Z(0) = \gamma'(0) \quad \text{e} \quad Z'(0) = X'(0).$$

Assim, X é o campo variacional de

$$\phi(t, s) = \exp_{\gamma(0)}(tZ(s)),$$

de modo que

$$X(t) = \frac{\partial \phi}{\partial s}(t, 0) = \mathrm{d}\exp_{\gamma(0)}(t\gamma'(0)) \cdot (tX'(0)),$$

como queríamos. ☐

Observação 4.2.5. Dado uma geodésica $\gamma : [0, a] \to M$, os campos

$$X_0(t) = \gamma'(t) \quad \text{e} \quad X_1(t) = t\gamma'(t)$$

são campos de Jacobi ao longo de γ. O primeiro tem derivada nula mas nunca se anula, enquanto que o segundo se anula se, e somente se, $t = 0$.

Proposição 4.2.6. Dados $X, Y \in \mathcal{J}_\gamma$, a função $\langle X', Y\rangle - \langle X, Y'\rangle$ é constante em $[0, a]$, e tem-se

$$\langle \gamma'(t), X(t)\rangle = at + b, \tag{4.8}$$

para todo $t \in [0, a]$, onde $a = \langle \gamma'(0), X'(0)\rangle$ e $b = \langle \gamma'(0), X(0)\rangle$.

Demonstração. Derivando ao longo de γ, obtemos:

$$\begin{aligned} \big(\langle X', Y\rangle - \langle X, Y'\rangle\big)' &= \langle X'', Y\rangle + \langle X', Y'\rangle - \langle X', Y'\rangle - \langle X, Y''\rangle \\ &= \langle R(\gamma', X)\gamma', Y\rangle - \langle R(\gamma', Y)\gamma', X\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde usamos a equação de Jacobi (4.7) e a simetria de R. Finalmente, a fim de mostrar a segunda afirmação, façamos $Y = \gamma'$ na função. Assim,

$$\langle X', \gamma'\rangle - \langle X, \gamma''\rangle = \langle X', \gamma'\rangle = \langle X, \gamma'\rangle'$$

é constante, pela primeira parte, e isso prova (4.8). ☐

Como consequência da Proposição 4.2.6 e do Lema 4.2.2, obtemos:

Corolário 4.2.7. Considere um campo vetorial $X \in \mathcal{J}_\gamma$ e $t_1, t_2 \in [0, a]$, com $t_1 \neq t_2$, tais que $\langle X, \gamma' \rangle(t_1) = \langle X, \gamma' \rangle(t_2)$. Então $\langle X, \gamma' \rangle$ independe de t. Em particular, se $X(0) = X(a) = 0$, então X é ortogonal a γ'.

Corolário 4.2.8. Considere um campo vetorial $X \in \mathcal{J}_\gamma$, com $X(0) = 0$. Então $\langle X, \gamma' \rangle = 0$ se, e somente se, $\langle X'(0), \gamma'(0) \rangle = 0$. Em particular, o subespaço de $\mathcal{J}_\gamma$ formado pelos campos $X \in \mathcal{J}_\gamma$ tais que $X(0) = 0$ e $\langle X, \gamma' \rangle = 0$ tem dimensão $n - 1$.

Observação 4.2.9. Dados uma geodésica normalizada $\gamma : [0, a] \to M$ e um campo vetorial $X \in \mathcal{J}_\gamma$, escrevamos

$$X = (X - aX_1 - bX_0) + (aX_1 + bX_0),$$

onde a, b são as constantes dadas em (4.8) e X_0, X_1 são os campos considerados na Observação 4.2.5. Obtemos, assim, uma decomposição

$$\mathcal{J}_\gamma = \mathcal{J}_\gamma^\perp \oplus \mathbb{R}X_1 \oplus \mathbb{R}X_0,$$

onde $\mathcal{J}_\gamma^\perp$ denota o subespaço de $\mathcal{J}_\gamma$ que é ortogonal a γ', i.e.,

$$\mathcal{J}_\gamma^\perp = \{X \in \mathcal{J}_\gamma : \langle X(t), \gamma'(t) \rangle = 0, \ \forall\ t \in [0, a]\}.$$

Por essa razão, podemos considerar, sem perda de generalidade, somente os campos de Jacobi ao longo de γ que são ortogonais a γ'.

Exemplo 4.2.10. Dado uma variedade Riemanniana M de curvatura seccional constante igual a K, considere uma geodésica normalizada $\gamma : [0, a] \to M$ e um campo $X \in \mathcal{J}_\gamma$, ortogonal a γ'. Em virtude da Proposição 3.1.7, segue que

$$R(\gamma', X)\gamma' = -KX. \tag{4.9}$$

Assim, a equação de Jacobi (4.7) reduz-se a

$$X'' + KX = 0.$$

Dado um vetor $w \in T_{\gamma(0)}M$, com $\langle \gamma'(0), w \rangle = 0$, seja $W(t)$ o transporte paralelo de w ao longo de γ. Se $\alpha_K : [0, a] \to \mathbb{R}$ é a solucção do PVI

$$\begin{cases} \alpha_K''(t) + K\alpha_K(t) = 0, \\ \alpha_K'(0) = 1, \\ \alpha_K(0) = 0, \end{cases}$$

temos

$$\alpha_K(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}t), & \text{se} \quad K < 0 \\ t, & \text{se} \quad K = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}t), & \text{se} \quad K > 0 \end{cases} .$$

e

$$X(t) = \alpha_K(t)W(t)$$

é o único campo de Jacobi ao longo de γ tal que $X(0) = 0$ e $X'(0) = w$.

4.3 Pontos conjugados

Nesta seção discutiremos uma caracterização das singularidades da aplicação exponencial, relacionando-as com os campos de Jacobi.

Fixemos uma geodésica $\gamma : [0, a] \to M$ e um instante t_0, com $0 < t_0 \leq a$.

Definição 4.3.1. O ponto $\gamma(t_0)$ é dito ser *conjugado* ao ponto $\gamma(0)$ se existe um campo de Jacobi não-nulo X ao longo de γ tal que $X(0) = 0$ e $X(t_0) = 0$.

Note que, em virtude do Corolário 4.2.7, um tal campo de Jacobi é sempre ortogonal a γ'. Neste caso, temos que $\gamma(0)$ é também conjugada a $\gamma(t_0)$ ao longo de γ^{-1}, de modo que podemos dizer que $\gamma(0)$ e $\gamma(t_0)$ são *pontos conjugados ao longo de* γ. De modo mais geral, um ponto $q \in M$ é chamado de *ponto conjugado* a p se q é conjugado a p ao longo de alguma geodésica partindo de p. O conjunto de todos os pontos de M conjugados a q é chamado de *lugar dos pontos conjugados* de p, e é denotado por $C(p)$.

Proposição 4.3.2. Um ponto $\gamma(t_0)$ é conjugado a $\gamma(0)$ se, e somente se, $t_0\gamma'(0)$ é ponto crítico da aplicação exponencial $\exp_{\gamma(0)}$.

Demonstração. Se $\gamma(t_0)$ é conjugado a $\gamma(0)$ então, por definição, existe um campo vetorial $X \in \mathcal{J}_\gamma$, com $X(0) = 0$ e $X(t_0) = 0$. Em virtude do Corolário 4.2.4, o campo X é dado por

$$X(t) = \mathrm{d}\exp_{\gamma(0)}(t\gamma'(0)) \cdot (tX'(0)),$$

para todo $t \in [0, a]$. Note que X é não-nulo se, e somente se, $X'(0) \neq 0$. Disso decorre que o vetor não-nulo $t_0X'(0)$ pertence ao núcleo da diferencial $\mathrm{d}\exp_{\gamma(0)}(t_0\gamma'(0))$, implicando que $t_0\gamma'(0)$ é, necessariamente, ponto crítico da exponencial $\exp_{\gamma(0)}$. Reciprocamente, se $t_0\gamma'(0)$ é ponto crítico de $\exp_{\gamma(0)}$, existe um vetor não-nulo $w \in T_{t_0\gamma'(0)}(T_{\gamma(0)}M) \simeq T_{\gamma(0)}M$ tal que

$$\mathrm{d}\exp_{\gamma(0)}(t_0\gamma'(0)) \cdot w = 0.$$

Assim,

$$X(t) = \mathrm{d}\exp_{\gamma(0)}(t\gamma'(0)) \cdot (tw)$$

é um campo de Jacobi ao longo de γ, com $X(0) = 0$ e $X(t_0) = 0$. Além disso, X é não-nulo, pois $X'(0) = w \neq 0$. Isso mostra que $\gamma(t_0)$ é conjugado ao ponto $\gamma(0)$. $\square$

A *multiplicidade* de um ponto $\gamma(t_0)$, conjugado ao ponto $\gamma(0)$, é o número máximo de campos de Jacobi X ao longo de γ que são linearmente independentes e satisfazem $X(0) = 0$ e $X(t_0) = 0$.

Corolário 4.3.3. A multiplicidade de $\gamma(t_0)$, como conjugado a $\gamma(0)$, é a dimensão do núcleo da aplicação linear

$$\mathrm{d}\exp_{\gamma(0)}(t_0\gamma'(0)) : T_{t_0\gamma'(0)}(T_{\gamma(0)}M) \to T_{\gamma(t_0)}M.$$

Em particular, a multiplicidade de um ponto conjugado é sempre menor do que ou igual a $n-1$.

Demonstração. Pela Proposição 4.3.2, o núcleo de $\mathrm{d}\exp_{\gamma(0)}(t_0\gamma'(0))$ é gerado pelos vetores $X'(0)$, onde X é campo de Jacobi ao longo de γ, com $X(0) = 0$ e $X(t_0) = 0$. Por outro lado, se $X_i(0) = 0$, para $1 \leq i \leq k$, então o Lema 4.2.2 garante que os campos $X_1, \ldots, X_k$ são linearmente independentes se, e somente se, $X_1'(0), \ldots, X_k'(0)$ o forem. Isso caracteriza a multiplicidade de $\gamma(t_0)$. Finalmente, como o campo de Jacobi $X(t) = t\gamma'(t)$ nunca se anula para $t > 0$, segue que a multiplicidade de um ponto conjugado não excede $n-1$. $\square$

Exemplo 4.3.4. A multiplicidade de um ponto conjugado da esfera $\mathbb{S}^n$ é igual a $n-1$. De fato, fixado um ponto $p \in \mathbb{S}^n$, seja $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{S}^n$ um arco de grande círculo, parametrizado pelo comprimento de arco, e ligando $p = \gamma(0)$ e $-p = \gamma(\pi)$. Sabemos que γ é geodésica em $\mathbb{S}^n$. Dado uma base ortonormal $\{w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ de $\{\gamma'(0)\}^\perp \subset T_{\gamma(0)}\mathbb{S}^n$, denotemos por $W_i(t)$ o transporte paralelo de w_i ao longo de γ. Admitindo momentaneamente que $\mathbb{S}^n$ tem curvatura seccional constante e igual a 1, segue do Exemplo 4.2.10 que os campos de Jacobi

$$X_i(t) = \sin t \cdot W_i(t),$$

com $1 \leq i \leq n-1$, são linearmente independentes e se anulam em p e $-p$, mostrando que a multiplicidade de $\gamma(\pi)$, como conjugado de $\gamma(0)$, é igual a $n-1$.

Proposição 4.3.5. Seja $\gamma : [0, a] \to M$ uma geodésica em M de modo que $\gamma(a)$ não seja conjugado de $\gamma(0)$. Então:

(i) Dados $w_1 \in T_{\gamma(0)}M$ e $w_2 \in T_{\gamma(a)}M$, existe um único campo $X \in \mathcal{J}_\gamma$ tal que $X(0) = w_1$ e $X(a) = w_2$.

(ii) Seja $\mathcal{A}$ o espaço vetorial real dos campos de Jacobi X ao longo de γ tais que $X(0) = 0$ e $\langle X'(0), \gamma'(0)\rangle = 0$. Se $\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ é uma base para $\mathcal{A}$, então $\{X_1(a), \ldots, X_{n-1}(a)\}$ é uma base para $\{\gamma'(a)\}^\perp \subset T_{\gamma(a)}M$.

Demonstração. (i) Denote por $\mathcal{J}_\gamma^0$ o espaço vetorial real n-dimensional formado pelos campos vetoriais $X \in \mathcal{J}_\gamma$ tais que $X(0) = 0$, e considere a aplicação

$$\psi : \mathcal{A} \to T_{\gamma(a)}M$$

dada por $\psi(X) = X(a)$. Claramente ψ é linear. Além disso, seja $X \in \ker \psi$, i.e., $X(a) = 0$. Como $\gamma(a)$ não é conjugado a $\gamma(0)$, tem-se $X \equiv 0$, logo ψ é injetora. Como $\dim \mathcal{A} = \dim T_{\gamma(a)}M$, tem-se que ψ é um isomorfismo linear. Assim, fixado $w_2 \in T_{\gamma(a)}M$, existe $X_1 \in \mathcal{J}_\gamma$ tal que $X_1(0) = 0$ e $X_1(a) = w_2$. De forma análoga, usando agora que $\gamma(0)$ não é conjugado a $\gamma(a)$, podemos encontrar um campo $X_2 \in \mathcal{J}_\gamma$ tal que $X_2(0) = w_1$ e $X_2(a) = 0$. Assim, o campo $X = X_1 + X_2$ é um campo de Jacobi ao longo de γ que satisfaz $X(0) = w_1$ e $X(a) = w_2$. A fim de mostrar a unicidade, suponha que existam dois campos vetoriais $X, Y \in \mathcal{J}_\gamma$ satisfazendo

$$X(0) = Y(0) = w_1 \quad \text{e} \quad X(a) = Y(a) = w_2.$$

Disso decorre que $X - Y \in \ker \psi$, implicando que $X \equiv Y$.

(ii) Fixe uma base $\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ base para $\mathcal{A}$. Como

$$\langle X(t), \gamma'(t)\rangle = \langle X'(0), \gamma'(a)\rangle + \langle X(0), \gamma'(0)\rangle,$$

para todo $t \in [0, a]$, tem-se que $\langle X(t), \gamma'(t)\rangle = 0$, para todo $t \in [0, a]$ e todo campo $X \in \mathcal{A}$. Considere uma combinação linear nula

$$\beta_1 X_1(a) + \ldots + \beta_{n-1} X_{n-1}(a) = 0.$$

O campo

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i X_i$$

é um campo de Jacobi ao longo de γ tal que $X(a) = 0$. Como $\gamma(a)$ não é conjugado a $\gamma(0)$, tem-se $X \equiv 0$. Desde que $\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ é base para $\mathcal{A}$, tem-se $\beta_1 = \ldots = \beta_{n-1} = 0$. $\square$

4.4 Exercícios

4.1

1. Sejam M uma variedade Riemanniana completa e $N \subset M$ uma subvariedade fechada de M. Fixe um ponto $p_0 \in M \setminus N$ e denote por $d(p_0, N)$ a distância de p_0 a N.

(i) Mostre que existe um ponto $q_0 \in N$ tal que $d(p_0, q_0) = d(p_0, N)$.

(ii) Mostre que a geodésica minimizante que liga p_0 a q_0 é ortogonal a N em q_0.

2. Seja $\gamma : [0, a] \to M$ uma curva diferenciável por partes. Mostre que

$$l(\gamma)^2 \leq 2aE(\gamma),$$

valendo a igualdade se, e somente se, γ está parametrizada com velocidade constante.

4.2

1. Dado uma geodésica $\gamma : [0, a] \to M$, considere a forma do índice I dada em (4.6). Mostre que o núcleo de I consiste dos campos de Jacobi ao longo de γ que se anulam em $t = 0$ e $t = a$.

2. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo de Killing e γ é uma geodésica em M, mostre que a restrição $J = X \circ \gamma$ de X a um campo vetorial ao longo de γ é um campo de Jacobi.

3. Seja G um grupo de Lie munido de uma métrica bi-invariante. Mostre que a restrição de um campo invariante à esquerda ou invariante à direita ao longo de uma geodésica γ é um campo de Jacobi.

4.3

1. Seja M uma variedade Riemanniana com curvatura seccional não-positiva. Mostre que, para todo $p \in M$, o lugar dos pontos conjugados $C(p)$ é vazio.

2. Seja $\gamma : [0, a] \to M$ uma geodésica em M e $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo de Killing.

(i) Mostre que a restrição $X(\gamma(t))$ de X a $\gamma(t)$ é um campo de Jacobi ao longo de γ.

(ii) Mostre que se M é conexa e existe um ponto $p \in M$, com $X(p) = 0$ e $(\nabla_v X)(p) = 0$, para todo $v \in T_pM$, então $X \equiv 0$.

Capítulo 5

Aplicações

5.1 A equação de Gauss

Nesta seção obteremos a equação de Gauss associada a uma imersão isométrica, que relaciona as curvaturas das duas variedades.

Definição 5.1.1. Uma imersão $f : M \to \tilde{M}$ entre variedades Riemannianas é dita ser uma *imersão isométrica* se

$$\langle X, T\rangle = \langle f_* X, f_* Y\rangle, \tag{5.1}$$

para quaisquer $p \in M$ e $X, Y \in T_pM$.

Se $f : M \to \tilde{M}$ é simplesmente uma imersão e $\langle , \rangle$ é uma métrica em $\tilde{M}$, a relação (5.1) define uma métrica Riemanniana em M, chamada a *métrica induzida* por f, em relação a qual f torna-se uma imersão isométrica.

Dado uma imersão isométrica $f : M \to \tilde{M}$, denotaremos por $f^*T\tilde{M}$ o fibrado vetorial induzido sobre M, cuja fibra no ponto $p \in M$ é $T_{f(p)}\tilde{M}$. O complemento ortogonal de f_*T_pM em $T_{f(p)}\tilde{M}$ é chamado o *espaço normal* de f em p, e será denotado por $T_pM^\perp$. O *fibrado normal* $TM^\perp$ de f é o subfibrado vetorial de $f^*T\tilde{M}$ cuja fibra em um ponto $p \in M$ é $T_pM^\perp$.

A conexão de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ de $\tilde{M}$ induz uma única conexão $\hat{\nabla}$ em $f^*T\tilde{M}$ de modo que

$$\hat{\nabla}_X(Z \circ f) = \tilde{\nabla}_{f_*X} Z,$$

para quaisquer $p \in M$, $X \in T_pM$ e $Z \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$. Identificaremos as conexões $\hat{\nabla}$ e $\tilde{\nabla}$, e denotaremos a primeira também por $\tilde{\nabla}$. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, podemos decompor

$$\tilde{\nabla}_X f_* Y = \left(\tilde{\nabla}_X f_* Y\right)^T + \left(\tilde{\nabla}_X f_* Y\right)^\perp$$

em relação à decomposição ortogonal

$$f^*\tilde{M} = f_*TM \oplus TM^\perp.$$

Proposição 5.1.2. A aplicação

$$\nabla_X Y = f_*^{-1}(\tilde{\nabla}_X f_* Y)^T$$

define uma conexão simétrica e compatível com a métrica de M e, portanto, coincide com a conexão de Levi-Civita de M.

Demonstração. As propriedades que definem uma conexão afim são facilmente verificadas. Mostremos que ∇ é compatível com a métrica e simétrica. De fato, dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle &= X\langle f_*Y, f_*Z\rangle \\ &= \left\langle (\tilde{\nabla}_X f_*Y)^T, f_*Z \right\rangle + \left\langle f_*Y, (\tilde{\nabla}_X f_*Z)^T \right\rangle \\ &= \left\langle f_*^{-1}(\tilde{\nabla}_X f_*Y)^T, Z \right\rangle + \left\langle Y, f_*^{-1}(\tilde{\nabla}_X f_*Z)^T \right\rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \nabla_X Y - \nabla_Y X &= f_*^{-1}(\tilde{\nabla}_X f_*Y - \tilde{\nabla}_Y f_*X)^T \\ &= f_*^{-1}(f_*[X, Y]) \\ &= [X, Y], \end{aligned}$$

como queríamos. □

A aplicação $\alpha_f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(TM^\perp)$ definida por

$$\alpha_f(X, Y) = (\tilde{\nabla}_X f_*Y)^\perp$$

é chamada a *segunda forma fundamental* de f. Assim, podemos escrever a *fórmula de Gauss* dada por

$$\tilde{\nabla}_X f_*Y = f_*\nabla_X Y + \alpha_f(X, Y). \tag{5.2}$$

Observe que, como

$$\tilde{\nabla}_X f_*Y - \tilde{\nabla}_Y f_*X = f_*[X, Y],$$

segue que α_f é simétrica. Além disso, α_f é $C^\infty(M)$-linear, logo o valor de $\alpha_f(X, Y)$ num ponto $p \in M$ depende somente dos valores de X e Y em p.

O *operador de forma* A_ξ de f num ponto $p \in M$ em relação a $\xi \in T_pM^\perp$ é definido pondo
$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha_f(X,Y), \xi\rangle,$$
para quaisquer $X, Y \in T_pM$. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in TM^\perp$, temos:

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{\nabla}_X \xi, f_* Y \right\rangle &= -\left\langle \xi, \tilde{\nabla}_X f_* Y \right\rangle \\ &= -\langle \xi, \alpha_f(X,Y)\rangle \\ &= -\langle A_\xi X, Y\rangle. \end{aligned}$$

Assim, a componente tangente de $\tilde{\nabla}_X\xi$ é $-f_* A_\xi X$. Por outro lado, a componente normal
$$\nabla^\perp_X = (\tilde{\nabla}_X \xi)^\perp$$
define uma conexão compatível em $TM^\perp$, chamada a *conexão normal de f* (cf. Exercício 5.1.1). Isso nos dá a *fórmula de Weingarten*:

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -f_* A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi. \tag{5.3}$$

Observação 5.1.3. No caso de hipersuperfícies $f : M^n \to \tilde{M}^{n+1}$, um campo unitário ξ normal a f é localmente único, a menos de sinal. Disso decorre, em particular, que
$$\nabla^\perp_X \xi = 0,$$
para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Fixado um tal campo ξ e denotando simplesmente por A o operador de forma A_ξ, as fórmulas de Gauss e Weingarten reduzem-se a

$$\tilde{\nabla}_X f_* Y = f_* \nabla_X Y + \langle AX, Y\rangle \xi \tag{5.4}$$

e

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -f_* AX, \tag{5.5}$$

respectivamente.

Usando as fórmulas de Gauss e Weingarten, podemos obter a equação de Gauss de uma imersão isométrica. A fim de somente simplificar a notação, usaremos o fato que qualquer imersão $f : M \to \tilde{M}$ é localmente um mergulho para identificar, localmente, M com $f(M)$ e f com a aplicação inclusão.

Denotemos por R e $\tilde{R}$ os tensores de curvatura de M e $\tilde{M}$, respectivamente, e calculemos a componente tangente de $\tilde{R}(X,Y)Z$, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Usando as fórmulas (5.4) e (5.3)

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z = \nabla_X \nabla_Y Z + \alpha_f(X, \nabla_Y Z) - A_{\alpha_f(Y,Z)} X + \nabla^\perp_X \alpha_f(Y,Z), \tag{5.6}$$

$$\tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z = \nabla_Y \nabla_X Z + \alpha_f(Y, \nabla_X Z) - A_{\alpha_f(X,Z)} Y + \nabla^{\perp}_Y \alpha_f(X, Z), \quad (5.7)$$

e

$$\tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z = \nabla_{[X,Y]} Z + \alpha_f([X, Y], Z). \quad (5.8)$$

Subtraindo (5.7) e (5.8) de (5.6), e tomando componentes tangentes, obtemos:

$$R(X, Y)Z = (\tilde{R}(X, Y)Z)^T + A_{\alpha_f(Y,Z)} X - A_{\alpha_f(X,Z)} Y, \quad (5.9)$$

conhecida como a *equação de Gauss* de f. Tomando o produto interno em ambos os lados de (5.9) com $W \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W\rangle =& \langle \tilde{R}(X, Y)Z, W\rangle + \langle \alpha_f(Y, Z), \alpha_f(X, W)\rangle \\ & - \langle \alpha_f(X, Z), \alpha_f(Y, W)\rangle \end{aligned} \quad (5.10)$$

Decorre de (5.12) que as curvaturas seccionais de M e $\tilde{M}$ estão relacionadas por

$$K(X, Y) = \tilde{K}(X, Y) + \langle \alpha_f(X, X), \alpha_f(Y, Y)\rangle - \|\alpha_f(X, Y)\|,$$

onde $K(X, Y)$ denota a curvatura seccional em $p \in M$ ao longo do plano gerado pelos vetores ortonormais $X, T \in T_pM$ e, analogamente, para $\tilde{K}(X, Y)$.

Observação 5.1.4. Quando $\tilde{M}$ é uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante igual a c, a equação de Gauss (5.9) torna-se

$$R(X, Y)Z = c(X \wedge Y)Z + A_{\alpha_f(Y,Z)} X - A_{\alpha_f(X,Z)} Y, \quad (5.11)$$

Observação 5.1.5. Dado uma hipersuperfície $f : M^n \to \tilde{M}^{n+1}$, fixemos um campo unitário ξ normal a f e escrevemos $A = A_\xi$. A equação de Gauss (5.9) pode ser escrita como

$$R(X, Y)Z = (\tilde{R}(X, Y)Z)^T + (AX \wedge ZY)Z. \quad (5.12)$$

Equivalentemente,

$$\langle R(X, Y)Z, W\rangle = \langle \tilde{R}(X, Y)Z, W\rangle + \langle AY, Z\rangle\langle AX, W\rangle - \langle AX, Z\rangle\langle AY, W\rangle,$$

ou em termos das curvaturas seccionais

$$K(X, Y) = \tilde{K}(X, Y) + \langle AX, X\rangle\langle AY, Y\rangle - \langle AX, Y\rangle^2. \quad (5.13)$$

Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM, formada por autovetores do operador de forma A, com $Ae_i = \lambda_i e_i$, para todo $1 \le i \le n$, a equação de Gauss (5.13) torna-se

$$K(e_i, e_j) = \tilde{K}(e_i, e_j) + \lambda_i \lambda_j. \quad (5.14)$$

Embora já sabíamos, podemos usar a equação (5.14) para mostrar que, no caso de superfície, o conceito de curvatura seccional coincide com a curvatura Gaussiana da superfície.

Proposição 5.1.6. Seja $f : M^2 \to \tilde{M}^3$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana de dimensão 2 em uma variedade Riemanniana $\tilde{M}^3$, com curvatural seccional constante igual a c. Então, a curvatura seccional de M^2 em p coincide com a curvatura Gaussiana da superfície M^2.

Demonstração. Fixado um ponto $p \in M^2$, seja $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal de T_pM, formada por autovetores do operador de forma A de M^2, com $Ae_i = \lambda_i e_i$. Segue então da equação de Gauss (5.14) que

$$K(e_1, e_2) = c + \lambda_1\lambda_2, \tag{5.15}$$

provando a afirmação. $\square$

Vejamos agora alguns exemplos.

Exemplo 5.1.7 (Curvatura da esfera $\mathbb{S}^n_r$)**.** Dado um número real $r > 0$, considere a esfera

$$\mathbb{S}^n_r = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle p, p\rangle = r^2\}$$

de raio r e centro em $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. A esfera $\mathbb{S}^n_r$ tem a métrica natural, induzida de $\mathbb{R}^{n+1}$ pela aplicação inclusão $i : \mathbb{S}^n_r \to \mathbb{R}^{n+1}$, que é uma imersão isométrica. Um campo unitário normal a $\mathbb{S}^n_r$ é dado por

$$\xi(p) = \frac{1}{r}p,$$

para todo $p \in \mathbb{S}^n_r$. Pela fórmula de Weingarten (5.5), o operador de forma A de $\mathbb{S}^n_r$, em relação a ξ, é dado por

$$AX = -\nabla^{\perp}_X \xi = -\frac{1}{r}X,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n_r)$. Assim, em virtude da equação de Gauss (5.12), o tensor de curvatura R de $\mathbb{S}^n_r$ é dado por

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{r^2}(X \wedge Y)Z,$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n_r)$. Disso decorre, em virtude da Proposição 3.1.7, que $\mathbb{S}^n_r$ tem curvatura seccional constante igual a $\frac{1}{r^2}$.

Exemplo 5.1.8 (Curvatura do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$)**.** No espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, considere a forma bilinear simétrica

$$\langle p, q\rangle = -x_0y_0 + \sum_{i=1}^{n} x_iy_i, \tag{5.16}$$

com $p = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ e $q = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$. Denotemos por $\mathbb{H}^n$ o subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ definido por

$$\mathbb{H}^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle p, p\rangle = -1 \text{ e } x_0 > 0\}.$$

$\mathbb{H}^n$ é chamado o *espaço hiperbólico* de dimensão n. Note que $\mathbb{H}^n$ é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$, pois pode ser realizada como a pré-imagem $f^{-1}(-1)$ através da função diferenciável $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por $f(p) = \langle p, p\rangle$, cuja diferencial é dada por $\mathrm{d}f(p) \cdot v = 2\langle p, v\rangle$, quaisquer que sejam $p, v \in \mathbb{R}^{n+1}$. Disso decorre, em particular, que

$$T_p\mathbb{H}^n = \{p\}^{\perp}. \tag{5.17}$$

Assim, podemos decompor $\mathbb{R}^{n+1}$ como sendo

$$\mathbb{R}^{n+1} = T_p\mathbb{R}^{n+1} = T_p\mathbb{H}^n \oplus \operatorname{span}\{p\}, \tag{5.18}$$

para todo $p \in \mathbb{H}^n$. Como a forma (5.16) tem índice 1, segue que $T_p\mathbb{H}^n$ tem índice 0, visto que $\langle p, p\rangle < 0$. Portanto, o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ induz uma métrica positivo-definida em $\mathbb{H}^n$, de modo que $\mathbb{H}^n$ torna-se uma variedade Riemanniana. Seja $\xi(p) = p$ o campo unitário posição que, em virtude de (5.17), é normal a $\mathbb{H}^n$. Pela fórmula de Weingarten (5.5), o operador de forma A de $\mathbb{H}^n$, em relação a ξ, é dado por $AX = -X$, para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^n)$, e de forma análoga ao caso da esfera $\mathbb{S}^n_r$, concluímos que $\mathbb{H}^n$ tem curvatura seccional constante igual a -1.

Complementando o Exemplo 5.1.8, temos a seguinte

Proposição 5.1.9. O espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ é uma variedade Riemanana completa e simplesmente conexa.

Demonstração. Identificando $\mathbb{R}^n$ com o subespaço de $\mathbb{R}^{n+1}$ no qual $x_0 = 0$, $\mathbb{H}^n$ é o gráfico da função diferenciável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2 + 1}.$$

Assim, $\mathbb{H}^n$ é difeomorfo a $\mathbb{R}^n$, logo simplesmente conexo. A fim de verificar a completude, considere um ponto $p \in \mathbb{H}^n$, um vetor unitário $v \in T_p\mathbb{H}^n$ e a curva

$$\gamma(t) = \cosh t \cdot p + \sinh t \cdot v,$$

com $t \in \mathbb{R}$. Note que

$$\gamma(0) = p \quad \text{e} \quad \gamma'(0) = v.$$

Além disso, $\langle \gamma(t)\, \gamma(t) \rangle = -1$, para todo $t \in \mathbb{R}$, logo $\gamma(t) \in \mathbb{H}^n$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Resta mostrar que γ é geodésica em $\mathbb{H}^n$. De fato, como $\gamma'' = \gamma$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{D\gamma'}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{\tilde{D}\gamma'}{\mathrm{d}t}\right)^T = \frac{\tilde{D}\gamma'}{\mathrm{d}t} + \left\langle \frac{\tilde{D}\gamma'}{\mathrm{d}t}, \gamma \right\rangle \gamma \\ &= \gamma'' + \langle \gamma'', \gamma \rangle \gamma = 0, \end{aligned}$$

como queríamos. $\square$

Observação 5.1.10. De forma mais geral, podemos considerar o *espaço hiperbólico de raio* r dado por

$$\mathbb{H}^n_r = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle p, p \rangle = -r^2 \text{ e } x_0 > 0\}$$

e, de forma análoga, concluir que $\mathbb{H}^n_r$ é uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa com curvatura seccional constante igual a $-\frac{1}{r^2}$.

5.2 Cut locus

Seja M uma variedade Riemanniana completa e conexa. Dados um ponto $p \in M$ e uma geodésica normalizada $\gamma : [0, +\infty) \to M$, com $\gamma(0) = p$, sabemos que para $t > 0$ suficientemente pequeno, tem-se $d(p, \gamma(t)) = t$, ou seja, $\gamma|_{[0,t]}$ é minimizante. Por outro lado, se $\gamma|_{[0,t_0]}$ não for minimizante, o mesmo ocorre para $\gamma|_{[0,t]}$, para todo $t \geq t_0$. Além disso, se (t_n) é uma sequência numérica, com $t_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, a continuidade da função distância d e o fato que $d(p, \gamma(t_n)) = t_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, garantem que $d(p, \gamma(t_0)) = t_0$, i.e., $\gamma|_{[0,t_0]}$ também é minimizante.

Com as considerações do parágrafo anterior, concluímos que o conjunto dos instantes $t \in [0, +\infty)$ tal que $\gamma|_{[0,t]}$ é minimizante é um intervalo fechado da forma $[0, t_0]$, para algum $t_0 > 0$, ou $[0, +\infty)$.

As considerações acima motivam as seguintes definições.

Definição 5.2.1. Dados um ponto $p \in M$ e um vetor unitário $v \in T_pM$, considere a geodésica $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$. Se o conjunto dos instantes $t \in (0, +\infty)$, tais que γ_v é minimizante em $[0, t]$, for um intervalo da forma $[0, t_0]$, diremos que $\gamma_v(t_0)$ é o *cut point* de p ao longo de γ na direção de v.

O conjunto dos cut point de p em M, em alguma direção, será denotado por $\mathrm{Cut}(p)$ e chamado o *cut locus* de p em M.

Exemplo 5.2.2. Se M é compacta, seu diâmetro é finito, logo não existe geodésica em M que realiza a distância mínima para $t > \mathrm{diam}(M)$. Assim, fixado $p \in M$, existe o cut point de p na direção de v, qualquer que seja o vetor unitário $v \in T_pM$.

Denotando, como de costume, por $\overline{\mathbb{R}}_+$ a compactificação de Alexandroff de $\mathbb{R}_+$, e por UM o fibrado tangente unitário de M, definimos a *função corte* $\rho : UM \to \overline{\mathbb{R}}_+$ de M pondo

$$\rho(p, v) = \begin{cases} t_0, & \text{se } \gamma_v(t_0) \text{ é cut point de } p \text{ na direção de } v, \\ +\infty, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $\gamma_v : [0, +\infty) \to M$ é a geodésica de M, com $\gamma_v(0) = p$ e $\gamma_v'(0) = v$. Analogamente, fixado $p \in M$, a *função corte em* p é a função

$$\rho_p : \mathbb{S}_1^{n-1}(0) \subset T_pM \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

dada por $\rho_p(v) = \rho(p, v)$. Note que

$$\begin{aligned} \mathrm{Cut}(p) &= \left\{ \exp_p(\rho_p(v) \cdot v) \in M : \|v\| = 1) \right\} \\ &= \left\{ \gamma_v(\rho_p(v)) \in M : \|v\| = 1) \right\}. \end{aligned}$$

Proposição 5.2.3. A função corte $\rho : UM \to \overline{\mathbb{R}}_+$ é contínua. Em particular, qualquer que seja o ponto $p \in M$, a função corte em p também é contínua.

Demonstração. Cf. [1]. □

Denotemos por

$$C_p = \{\rho_p(v) \cdot v \in T_pM : \|v\| = 1\}$$

e

$$D_p = \{tv \in T_pM : 0 \leq t < \rho_p(v) \text{ e } \|v\| = 1\}.$$

Observe que

$$\mathrm{Cut}(p) = \exp_p(C_p) \quad \text{e} \quad \partial D_p = C_p.$$

Proposição 5.2.4. Para todo ponto $p \in M$, temos uma união disjunta

$$M = \exp_p(D_p) \cup \mathrm{Cut}(p).$$

Demonstração. Dado um ponto $x \in M$, pelo teorema de Hopf-Rinow, existe uma geodésica normalizada minimizante γ_v ligando p e x, com $\|v\| = 1$. Como γ_v é minimizante em $[0, d(p,x)]$, temos que $\rho_p(v) \geq d(p,x)$. Isso implica que

$$d(p,x) \cdot v \in D_p \cup C_p,$$

logo $x = \exp_p(d(p,x) \cdot v) \in \exp_p(D_p) \cup \mathrm{Cut}(p)$. Por outro lado, suponha que exista $x \in \exp_p(D_p) \cap \mathrm{Cut}(p)$. Então, $x \in \exp_p(D_p)$ significa que existe uma geodésica normalizada minimizante $\gamma : [0,a] \to M$, com $\gamma(0) = p$ e $\gamma(a) = x$, e γ é minimizante em $[0, a+\epsilon]$, para algum $\epsilon > 0$. Por outro lado, $x \in \mathrm{Cut}(p)$ significa que existe uma geodésica normalizada minimizante $\eta : [0,a] \to M$, com $\eta(0) = p$ e $\eta(a) = x$, e η não é minimizante em $[0, a+\epsilon]$, para todo $\epsilon > 0$. Disso decorre que γ e η são geodésicas distintas, contradizendo o item (a) da Proposição 2.1.10. Portanto, $\exp_p(D_p) \cap \mathrm{Cut}(p) = \emptyset$. □

Exemplo 5.2.5. Nos espaços $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{H}^n$, as geodésicas estão definidas em todo $\mathbb{R}$. Além disso, existe um único segmento geodésico ligando quaisquer dois pontos distintos. Pelo teorema de Hopf-Rinow, este segmento é a geodésica minimizante ligando esses dois pontos. Disso decorre que qualquer segmento geodésico é minimizante e, assim, o cut locus de qualquer ponto é vazio.

Exemplo 5.2.6. As geodésica da esfera são os grandes círculos, definidos em todo $\mathbb{R}$, embora sejam periódicos. Dado um ponto $p \in \mathbb{S}^n$, uma geodésica normalizada γ partindo de $p = \gamma(0)$ é minimizante até atingir o ponto antípoda $\gamma(\pi) = -p$, pois γ é a única geodésica ligando p a $\gamma(t)$, para $t \in (0,\pi)$. Se $t = \pi + \epsilon$, para algum ϵ suficientemente pequeno, existe outra geodésica η, de comprimento menor do que o de γ, ligando p a $\gamma(t)$, e satisfazendo $\eta'(0) = -\gamma'(0)$. Portanto, temos que $\mathrm{Cut}(p) = \{-p\}$.

5.3 O teorema de Jacobi-Darboux

Nesta seção provaremos um teorema, devido a Jacobi e Darboux, que dá uma condição suficiente, bem como uma condição necessária, para um segmento geodésico ser minimizante.

Lema 5.3.1 (Gauss global)**.** Dados um ponto $p \in M$ e vetores $v, w \in T_pM$, considere a geodésica $\gamma(t) = \exp_p(tw)$. Então

$$\langle \mathrm{d}\exp_p(tw) \cdot v, \mathrm{d}\exp_p(tw) \cdot w \rangle = \langle v, w \rangle. \tag{5.19}$$

Demonstração. Observe, inicialmente, que o lado direito em (5.19) é o valor, em $t = 0$, do lado esquerdo. Além disso,

$$\mathrm{d}\exp_p(tw) \cdot w = \gamma'(t).$$

Seja Y o campo de Jacobi ao longo de γ com condições iniciais

$$\begin{cases} Y(0) = 0, \\ Y'(0) = v. \end{cases}$$

Por um lado, em virtude do Corolário 4.2.4, temos

$$\frac{1}{t} Y(t) = \mathrm{d}\exp_p(tw) \cdot v, \ t \neq 0.$$

Por outro lado, decompomos

$$v = \lambda w + v_1,$$

com $\langle v_1, w\rangle = 0$, e sejam Y_0, Y_1 campos de Jacobi ao longo de γ tais que

$$\begin{cases} Y_0(0) = 0, \\ Y_0'(0) = \lambda w, \end{cases} \qquad \begin{cases} Y_1(0) = 0, \\ Y_1'(0) = v_1. \end{cases}$$

Então,

$$Y_0(t) = \lambda t \gamma'(t)$$

e

$$Y(t) = Y_0(t) + Y_1(t) = \lambda t \gamma'(t) + Y_1(t).$$

Assim, para $t \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{d}\exp_p(tw) \cdot v, \mathrm{d}\exp_p(tw) \cdot w\rangle &= \frac{1}{t}\langle Y_1(t), \gamma'(t)\rangle \\ &= \lambda\langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle + \frac{1}{t}\langle Y_1(t), \gamma'(t)\rangle. \end{aligned}$$

O primeiro termo na última linha acima é

$$\lambda\langle w, w\rangle = \langle v, w\rangle,$$

pois o comprimento do vetor tangente de uma geodésica é constante, enquanto o segundo termo é zero em virtude da Proposição 4.2.6. □

Lema 5.3.2. Dados um ponto $p \in M$ e um vetor $v \in T_pM$, considere o segmento radial $\varphi : [0, 1] \to T_pM$ dado por $\varphi(t) = tv$. Dado uma curva diferenciável por partes $\alpha : [0, 1] \to T_pM$, ligando a origem 0 e v, temos

$$l(\exp_p \circ \alpha) \geq l(\exp_p \circ \varphi) = \|v\|.$$

Demonstração. Assuma, sem perda de generalidade, que $\alpha(t) \neq 0$, para todo $t > 0$. No caso em que α é diferenciável, escrevamos

$$\alpha(t) = r(t)v(t),$$

onde $r : (0,1] \to (0,+\infty)$ e $v : [0,1] \to \mathbb{S}_1^{n-1}(0) \subset T_pM$ são diferenciáveis. Então,

$$\alpha'(t) = r'(t)v(t) + r(t)v'(t),$$

com $\langle v(t), v'(t)\rangle = 0$. Aplicando o Lema 5.3.1, obtemos:

$$\begin{aligned}
\|(\exp_p \circ \alpha)'(t)\|^2 &= \|\mathrm{d}\exp_p(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\|^2 \\
&= (r'(t))^2 \|\mathrm{d}\exp_p(\alpha(t)) \cdot v(t)\|^2 \\
&\geq (r'(t))^2 \|v(t)\|^2 \\
&= (r'(t))^2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$l(\exp_p \circ \alpha) \geq \int_0^1 |r'(t)|\mathrm{d}t \geq |r(1) - \lim_{t\to 0^+} r(t)| = \|v\|.$$

No caso geral, repetimos o argumento acima em cada subintervalo onde α é diferenciável e somamos as estimativas. $\square$

Com os Lemas 5.3.1 e 5.3.2, podemos provar o resultado central dessa seção.

Teorema 5.3.3 (Jacobi-Darboux)**.** *Seja $\gamma : [0,a] \to M$ um segmento geodésico normalizado em M, com $\gamma(0) = p$ e $\gamma(a) = q$.*

(i) Se não existem pontos conjugados de p ao longo de γ, então existe uma vizinhança[1] V de γ tal que $E(\eta) \geq E(\gamma)$ e $l(\eta) \geq l(\gamma)$, para toda curva $\eta \in V$. Além disso, se $l(\eta) = l(\gamma)$ para alguma $\eta \in V$, então η e γ diferem apenas por reparametrização.

(ii) Se $\gamma(t_0)$ é conjugado a p ao longo de γ, para algum $t_0 \in (0,a)$, então existe uma variação $\{\gamma_t\}$ de γ com extremos fixados de modo que $E(\gamma_t) < E(\gamma)$ e $l(\gamma_t) < l(\gamma)$, para t suficientemente pequeno.

Demonstração. (i) Seja $v = \gamma'(0)$ e defina $\varphi : [0,a] \to T_pM$ pondo $\varphi(t) = tv$. Por hipótese, e usando a Proposição 4.3.2, temos que $\varphi(t)$ é um ponto regular

[1] Relativa a C^0-topologia no espaço das curvas diferenciáveis por partes em $[0,a]$, ligando p e q.

de $\exp_p$, para $t \in [0,a]$. Como $\varphi([0,a])$ é compacto, podemos cobrí-lo por uma união finita

$$\varphi([0,a]) \subset \bigcup_{i=1}^{k} W_i$$

de bolas abertas $W_i \subset T_pM$ tais que $\exp_p$ é um difeomorfismo de W_i sobre um aberto $U_i \subset M$. Escolha uma partição $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = a$ de $[0,a]$ tal que $\varphi([t_{i-1}, t_i]) \subset W_i$, para $1 \leq i \leq k$. Seja V a bola aberta centrada em γ de raio ϵ, ou seja, V consiste de todas as curvas diferenciáveis por partes $\eta : [0,a] \to M$ ligando p e q e satisfazendo $d(\eta(t)\gamma(t)) < \epsilon$, para todo $t \in [0,a]$. Tome $\epsilon > 0$ tal que $\eta([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$, para $\eta \in V$ e $1 \leq i \leq k$. Note que $\exp_p(W_{i-1} \cap W_i)$ é uma vizinhança aberta de $\gamma(t_{i-1})$ contida em $U_{i-1} \cap U_i$. Podemos diminuir ϵ, se necessário, de modo que $\eta(t_{i-1}) \in \exp_p(W_{i-1} \cap W_i)$, para $\eta \in V$ e $2 \leq i \leq k$. Para cada curva $\eta \in V$, levantamos η a uma curva diferenciável por partes α em T_pM da seguinte forma. Definimos

$$\alpha(t) = (\exp_p|_{W_1})^{-1}(\eta(t)),$$

para $t \in [0, t_1]$. Note que $\alpha(0) = 0$. Assuma que α tenha sido definida em $[0, t_{i-1}]$, para algum $2 \leq i \leq k$, e que α satisfaça $\exp_p(\alpha(t)) = \eta(t)$, para $t \in [0, t_{i-1}]$, e $\alpha(t_{i-1}) \in W_{i-1}$. Essas condições implicam que

$$\exp_p(\alpha(t_{i-1})) = \eta(t_{i-1}) \in \exp_p(W_{i-1} \cap W_i),$$

logo $\alpha(t_{i-1}) \in W_i$. Assim, faz sentido definir

$$\alpha(t) = (\exp_p|_{W_i})^{-1}(\eta(t)),$$

para $t \in [t_{i-1}, t_i]$. Isso completa o passo indutivo e mostra que α pode ser definida em $[0,a]$. Como $\eta(a) \in W_k$, temos $\alpha(a) = av$. Pelo Lema 5.3.2, temos

$$l(\eta) = l(\exp_p \circ \alpha) \geq l(\exp_p \circ \varphi) = l(\gamma).$$

Além disso, como $\mathrm{d}\exp_p(\alpha(t))$ é injetora, para $t \in [0,a]$, a prova do Lema 5.3.2 mostra que a igualdade acima ocorre a menos que v seja constante e r' não-negativo, ou seja, η coincide com γ a menos de reparametrização. Para a afirmação sobre a energia, temos

$$E(\eta) \geq \frac{1}{2a} l(\eta)^2 \geq \frac{1}{2a} l(\gamma^2) = E(\gamma),$$

em virtude do Exercício 4.1.2, concluindo a prova de (i).

(ii) Por hipótese, existe um campo de Jacobi não-trivial Y ao longo de γ tal que $Y(0) = Y(t_0) = 0$. Pela não-trivialidade de Y, temos $Y'(t_0) \neq 0$. Seja Z_1 o campo vetorial paralelo ao longo de γ, com $Z_1(t_0) = -Y'(t_0)$, considere uma função diferenciável $\theta : [0, a] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\theta(0) = \theta(a) = 0 \quad \text{e} \quad \theta(t_0) = 1,$$

e seja $Z(t) = \theta(t)Z_1(t)$. Além disso, estenda Y a um campo vetorial diferenciável por partes em $[0, a]$ pondo $Y|_{[t_0,a]} = 0$, e seja $Y_s(t) = Y(t) + sZ(t)$, para $t \in [0, a]$ e $s \in \mathbb{R}$. Note que Y_s é um campo vetorial diferenciável por partes, ortogonal a γ', anulando-se em 0 e a. Considere uma variação com extremos fixados $\{\gamma_s\}$ com campo variacional associado Y_s. Então

$$\begin{aligned} I(Y_s, Y_s) &= I(Y, Y) + 2sI(Y, Z) + s^2 I(Z, Z) \\ &= -2s\langle Y'(t_0^+) - Y'(t_0^-), Z(t_0)\rangle + s^2 I(Z, Z) \\ &= -2s\|Y'(t_0)\|^2 + s^2 I(Z, Z) \\ &< 0, \end{aligned}$$

onde s é escolhido de modo a garantir a última desigualdade acima. Assim, $E(\gamma_s) < E(\gamma)$, para s suficientemente pequeno. Além disso,

$$l(\gamma_s)^2 \leq 2aE(\gamma_s) < 2aE(\gamma) = l(\gamma)^2,$$

e isso conclui a demonstração. $\square$

Uma aplicação do Teorema 5.3.3 é uma espécie de refinamento da Proposição 5.2.4.

Corolário 5.3.4. Para cada ponto $p \in M$, a aplicação exponencial

$$\exp_p : D_p \to M \setminus \mathrm{Cut}(p)$$

é um difeomorfismo.

Demonstração. Pela Proposição 5.2.4, temos $\exp_p(D_p) = M \setminus \mathrm{Cut}(p)$. O Teorema 5.3.3 implica que uma geodésica $\gamma_v : [0, +\infty) \to M$, com $\|v\| = 1$, não minimiza o comprimento l depois seu primeiro ponto conjugado. Assim, um ponto conjugado ao longo de γ_v, caso exista, deve ocorrer em um instante $t_0 \geq \rho_p(v)$. Disso decorre que $\exp_p$ é um difeomorfismo local em tv, para $t \in [0, \rho_p(v)]$, em virtude da Proposição 4.3.2. Como $v \in T_pM$ é um vetor unitário arbitrário, isso mostra que $\exp_p$ é um difeomorfismo local em D_p. Resta mostrar que $\exp_p$ é injetora em D_p. Mas isso porém segue do fato que qualquer ponto em $\exp(D_p)$ pode ser ligado a p por uma única geodésica minimizante (cf. Proposição 2.1.10). $\square$

O *primeiro ponto conjugado* ao logo da geodésica $\gamma(t) = \exp_p(tv)$, onde $p \in M$ e $v \in T_pM$, é o menor instante $t_0 > 0$ para o qual $\gamma(t_0)$ é conjugado a p ao longo de γ. Segue do Teorema 5.3.3 que o primeiro ponto conjugado de p ao longo de γ não ocorre antes do cut point. Em particular, o lugar dos pontos conjugados de um ponto é vazio se seu cut locus for vazio.

Proposição 5.3.5. Fixe um ponto $p \in M$. Então, um ponto $q \in M$ pertence ao cut locus $\mathrm{Cut}(p)$ se, e somente se, uma das seguintes (não-mutuamente exclusivas) afirmações ocorre:

(i) Existem, pelo menos, duas geodésicas minimizantes distintas ligando p e q.

(ii) O ponto q é o primeiro ponto conjugado a p ao longo de uma geodésica minimizante. Em particular, $q \in \mathrm{Cut}(p)$ se, e somente se, $p \in \mathrm{Cut}(q)$.

Demonstração. Em virtude das Proposição 2.1.10 e Teorema 5.3.3, as condições (i) e (ii) são suficientes para que o ponto q pertença ao cut locus $\mathrm{Cut}(p)$. Reciprocamente, suponha $q \in \mathrm{Cut}(p)$. Assim, podemos escrever $q = \exp_p(\rho_p(v)v)$, para algum vetor unitário $v \in T_pM$, com $\rho_p(v) < +\infty$. Em particular, $\gamma(t) = \exp_p(tv)$, com $0 \leq t \leq \rho_p(v)$, é uma geodésica minimizante ligando p e q. Escolha uma sequência numérica (t_j) convergindo para $\rho_p(v)$, com $t_j \to \rho_p(v)^-$. Para cada índice j, existe uma geodésica minimizante γ_j ligando p e $\gamma(t_j)$, digamos $\gamma_j(t) = \exp_p(tw_j)$, onde $w_j \in T_pM$ e $\|w_j\| = 1$. Seja $d_j = d(p, \gamma(t_j))$, de modo que $\gamma_j(d_j) = \gamma(t_j)$. Como $t_j > \rho_p(v)$, tem-se que $\gamma|_{[0,t_j]}$ não é minimizante, logo $d_j < t_j$. Pela compacidade da esfera unitária em T_pM e passando a uma subsequência, se necessário, podemos assumir que (w_j) converge para um vetor unitário $w \in T_pM$. Como a distância d é contínua, temos

$$d_j = d(p, \gamma(t_j)) \to d(p, \gamma(\rho_p(v))) = \rho_p(v).$$

Tomando o limite $j \to +\infty$ em

$$\gamma(t_j) = \gamma_j(d_j) = \exp_p(d_j w_j),$$

obtemos que $q = \exp_p(\rho_p(v)v)$. Temos agora duas situações a considerar.

Caso 1: Se $w \neq v$, então $\eta(t) = \exp_p(tw)$ é uma geodésica minimizante ligando p e q, com $\eta \neq \gamma$. Esse é o caso do item (i).

Caso 2: Se $w = v$, então já temos que

$$\exp_p(d_j w_j) = \gamma(t_j) = \exp_p(t_j v),$$

para todo j, onde $d_j w_j \to \rho_p(v)v$ e $t_j v \to \rho_p(v)v$. Isso implica que $\exp_p$ não é localmente injetora em $\rho_p(v)v$, logo $\rho_p(v)v$ é uma singularidade de $\exp_p$. Assim, $q = \exp_p(\rho_p(v)v)$ é conjugado a p ao longo de γ. Como γ é minimizante em $[0, \rho_p(v)]$, q deve ser o primeiro ponto conjugado de p ao longo de γ, e esse é o caso do item (ii).

Para a última afirmação, note que os itens (i) e (ii) são simétricos em p e q. Isso é claro para o item (i) e segue do Teorema 5.3.3(ii) para o item (ii). □

5.4 Formas espaciais

Uma variedade Riemanniana completa, conexa e com curvatura seccional constante é usualmente chamada de *forma espacial*. Vimos na Seção 5.3 que, assim como o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, a esfera $\mathbb{S}^n_k$ e o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n_k$ são formas espaciais conexas e simplesmente conexas. Nesta seção mostraremos que, a menos de normalização, $\mathbb{H}^n$, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{S}^n$ são as únicas formas espaciais simplesmente conexas.

Inicialmente, provaremos um resultado de natureza local.

Lema 5.4.1. Quaiquer duas variedades Riemanninas de mesma dimensão e mesma curvatura seccional constante k são, localmente, isométricas.

Demonstração. Sejam M e $\tilde{M}$ variedades Riemannianas de mesma dimensão e de curvatura seccional constante igual a k. Fixe pontos $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$ e escolha uma isometria linear $f : T_pM \to T_{\tilde{p}}\tilde{M}$. Escolha bolas abertas $U \subset T_pM$ e $\tilde{U} \subset T_{tp}\tilde{M}$, com $\tilde{U} = f(U)$, que determinam vizinhanças normais $V = \exp_p(U)$ e $\tilde{V} = \exp_{\tilde{p}}(V)$. A aplicação $F : V \to \tilde{V}$, dada por

$$F \circ \exp_p = \exp_{\tilde{p}} \circ f,$$

é um difeomorfismo. Note que $F(p) = \tilde{p}$ e $\mathrm{d}F(p) = f$. Afirmamos que F é uma isometria. Para isso, basta mostrar que $\mathrm{d}F(p) : T_qM \to T_{\tilde{q}}\tilde{M}$ é uma isometria linear, onde $q \in V \subset M$ é um ponto arbitrário e $\tilde{q} = F(q)$. Então, dado $q \in V$, escrevamos $q = \gamma_v(t_0)$, onde γ_v é a geodésica radial partindo de p, com $v \in T_pM$, $\|v\| = 1$ e $t_0 \in [0, \epsilon)$, para algum $\epsilon > 0$. Decompomos ortogonalmente o espaço tangente T_qM como sendo

$$T_qM = \operatorname{span}\{\gamma_v'(t_0)\} \oplus W,$$

onde W é o complemente ortogonal e, similarmente,

$$T_{\tilde{q}}\tilde{M} = \operatorname{span}\{\gamma_{\tilde{v}}'(t_0)\} \oplus \tilde{W},$$

onde $\tilde{v} = f(v)$. Note que $F \circ \gamma_v$ é a geodésica $\gamma_{\tilde{v}}$ em $\tilde{M}$, logo

$$\begin{aligned} \|\mathrm{d}F(q) \cdot \gamma_v'(t)\| &= \|\gamma_{\tilde{v}}'(t)\| = \|\tilde{v}\| = \|v\| \\ &= \|\gamma_v'(t)\|. \end{aligned}$$

Além disso, pelo Lema 5.3.1, $\mathrm{d}\exp_p(t_0 v) : T_pM \to T_qM$ transforma a decomposição ortogonal $T_pM = \mathrm{span}\{v\} \oplus \{v\}^\perp$ sobre a decomposição ortogonal $T_qM = \mathrm{span}\{\gamma_v'(t_0)\} \oplus W$ e, da mesma forma, para $\mathrm{d}\exp_{\tilde{p}}(t_0\tilde{v})$. Disso decorre que $\mathrm{d}F(q)$ transforma a decomposição ortogonal $T_qM = \mathrm{span}\{\gamma_v'(t_0)\} \oplus W$ sobre $T_{\tilde{q}}\tilde{M} = \mathrm{span}\{\gamma_{\tilde{v}}'(t_0)\} \oplus \tilde{W}$. Resta mostrar que $\mathrm{d}F(q)$ restringe-se a uma isometria de W em $\tilde{W}$. Considere um vetor $w \in T_pM$, ortogonal a v, e seja $\tilde{w} = f(w) \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$. Estenda w e $\tilde{w}$ a campos paralelos W e $\tilde{W}$ ao longo de γ_v e $\gamma_{\tilde{v}}$, respectivamente. Por um lado, os campos de Jacobi Y, $\tilde{Y}$ ao longo de γ_v e $\gamma_{\tilde{v}}$, respectivamente, com condições iniciais

$$\begin{cases} Y(0) = 0, \\ Y'(0) = w, \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{Y}(0) = 0, \\ \tilde{Y}'(0) = \tilde{w}. \end{cases}$$

são dados por

$$Y(t) = \mathrm{d}\exp_p(tv) \cdot (tw) \quad \text{e} \quad \tilde{Y}(t) = \mathrm{d}\exp_{\tilde{p}}(t\tilde{v}) \cdot (t\tilde{w}),$$

em virtude do Corolário 4.2.4. Por outro lado, a equação de Jacobi ao longo de uma geodésica em um espaço de curvatura constante igual a k é dado por $Y'' + kY = 0$ (cf. Exemplo 4.2.10). Disso decorre que

$$Y(t) = \frac{1}{k}\sin(kt)W(t) \quad \text{e} \quad \tilde{Y}(t) = \frac{1}{k}\sin(kt)\tilde{W}(t),$$

se $k > 0$,

$$Y(t) = \frac{1}{k}\sinh(kt)W(t) \quad \text{e} \quad \tilde{Y}(t) = \frac{1}{k}\sinh(kt)\tilde{W}(t),$$

se $k < 0$, e

$$Y(t) = tW(t) \quad \text{e} \quad \tilde{Y}(t) = t\tilde{W}(t),$$

se $k = 0$. Em qualquer caso, tem-se

$$\|\tilde{Y}(t)\| = \|Y(t)\|.$$

Como $Y(t_0) \in W$ é um vetor arbitrário e

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F(q) \cdot Y(t) &= \mathrm{d}F(q) \cdot (\mathrm{d}\exp_p(tv) \cdot (tw)) \\ &= \mathrm{d}\exp_{\tilde{p}} \cdot (tf(w)) \\ &= \tilde{Y}(t), \end{aligned}$$

segue que $\mathrm{d}F(q) : W \to \tilde{W}$ é uma isometria, concluindo a demonstração. $\square$

Teorema 5.4.2 (Killing-Hopf)**.** *Seja M^n uma forma espacial simplesmente conexa, de curvatura igual a k. Então, M^n é isométrica:*

(i) ao espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$, se $k = -1$,

(ii) ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, se $k = 0$,

(iii) à esfera unitária $\mathbb{S}^n$, se $k = 1$.

Demonstração. Em virtude do Exercício 5.4.1, podemos normalizar a métrica de M de modo que k pode ser escolhido como sendo igual a -1, 0 ou 1. Denotemos por $\tilde{M}$ o espaço $\mathbb{H}^n$, $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{S}^n$ de acordo com $k = -1$, 0 ou 1, respectivamente. Fixados pontos $p \in M$ e $\tilde{p} \in \tilde{M}$, escolha uma isometria linear $f : T_{\tilde{p}}\tilde{M} \to T_pM$. Como na prova do Lema 5.4.1, podemos construir uma isometria $F : \tilde{V} \to V$ com condições iniciais

$$F(\tilde{p}) = p \quad \text{e} \quad \mathrm{d}F(\tilde{p}) = f,$$

onde V, $\tilde{V}$ são vizinhanças normais de p e $\tilde{p}$, respectivamente. Afirmamos que F pode ser estendida a uma isometria global $F : \tilde{M} \to M$. Consideremos, inicialmente, os casos $k = -1$ e $k = 0$. Como $\mathrm{Cut}(p) = \emptyset$, para todo $p \in \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{H}^n$, podemos considerar $\tilde{V} = \tilde{M}$ como vizinhança normal e, devido à completude de M, extender F a uma aplicacação de $\tilde{M}$ em M pela mesma fórmula

$$F \circ \exp_{\tilde{p}} = \exp_p \circ f.$$

Observe que F não é, necessariamente, um difeomorfismo global, pois a condição $f(T_{\tilde{p}}\tilde{M}) = T_pM$ não implica que T_pM é vizinhança normal de p. No entanto, a prova do Lema 5.4.1 permite-nos concluir que F é uma isometria local. Assim, em virtude do Teorema 2.2.12, concluimos que F é um recobrimento Riemanniano e, em virtude de M ser simplesmente conexa, F é um homeomorfismo, mostrando que F é isometria. Para o caso $k = 1$, o mesmo argumento anterior nos fornece uma isometria $F : \tilde{V}_{\tilde{p}} \to M$, onde $\tilde{V}_{\tilde{p}} = \mathbb{S}^n \setminus \{-\tilde{p}\}$ é a vizinhança normal maximal de $\tilde{p}$. Escolha agora outro ponto $\tilde{q} \in \mathbb{S}^n \setminus \{\tilde{p}, -\tilde{p}\}$ e construa, do mesmo modo, uma isometria local $G : \tilde{V}_{\tilde{q}} \to M$ com condições iniciais

$$G(\tilde{q}) = F(\tilde{q}) \quad \text{e} \quad \mathrm{d}G(\tilde{q}) = \mathrm{d}F(\tilde{q}),$$

onde $\tilde{V}_{\tilde{q}} = \mathbb{S}^n \setminus \{-\tilde{q}\}$. Pelo Exercício 5.4.2, F e G definem uma isometria local $\phi : \mathbb{S}^n \to M$. O restante da prova segue de forma análoga ao caso anterior. $\square$

5.5 O teorema de Synge

O objetivo desta seção é provar um teorema devido a Synge que afirma que toda variedade Riemanniana compacta, de dimensão par e curvatura seccional positiva deve ser simplesmente conexa. Provaremos, inicialmente, um resultado devido a Cartan sobre existência de geodésicas fechadas sem nenhuma restrição sobre a curvatura da variedade.

Lembremos que duas aplicações contínuas $f, g : \mathbb{S}^1 \to M$ são ditas *livremente homotópicas* se existe uma aplicação contínua $H : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to M$ tal que

$$H(x,0) = f(x) \quad \text{e} \quad H(x,1) = g(x),$$

para todo $x \in \mathbb{S}^1$. Esta é uma relação de equivalência e a correspondente classe de equivalência é chamada uma *classe livre de homotopia*. A classe livre de homotopia *trivial* consiste de todas as aplicações f que são livremente homotópicas a um ponto.

A diferença entre a definição acima e a de grupo fundamental é que na classe livre permite-se que as origens das aplicações variem em M. O resultado seguinte mostra que em uma variedade Riemanniana compacta M, com $\pi_1(M) \neq \{0\}$, sempre existe uma *geodésica fechada*, ou seja, uma curva fechada que é geodésica em todos os pontos. Um *laço geodésico* é uma curva fechada que é geodésica em todos menos um de seus pontos, onde ela deixa de ser regular.

Lema 5.5.1 (Cartan)**.** Se M é uma variedade Riemanniana compacta, com $\pi_1(M) \neq \{0\}$, então toda classe livre de homotopia não-trivial $\mathcal{C}$ contém uma geodésica fechada de comprimento mínimo.

A ideia da prova consiste em considerar uma sequência de geodésicas fechadas quebradas $\gamma_n : \mathbb{S}^1 \to M$ tal que $l(\gamma_n) \to l = \inf\{l(\eta) : \eta \in \mathcal{C}\}$. A sequência (γ_n) é equicontínua, logo $\gamma_n \to \sigma \in C^0$ uniformemente. Defina γ como a geodésica fechada quebrada ligando $\sigma(t_i)$ e $\sigma(t_{i-1})$, onde $\sigma([t_{i-1}, t_i])$ está contido em uma vizinhança totalmente normal. Isso implica que $\sigma \in \mathcal{C}$ e $l(\gamma) = l$. Tendo γ comprimento mínimo em $\mathcal{C}$, γ é localmente minimizante e, assim, é geodésica fechada.

Demonstração. Mostremos, inicialmente, que existe $\epsilon > 0$ tal que quaisquer dois pontos $p, q \in M$, com $d(p,q) < \epsilon$, podem ser ligados por uma única geodésica minimizante, e essa geodésica depende diferencialvelmente nos seus extremos. De fato, considere uma cobertura finita

$$M = \bigcup_{i=1}^{k} B(p_i, \epsilon_i/2)$$

de M, onde $B(p_i, \epsilon_i)$ é uma bola aberta totalmente normal, dada pela Proposição 1.4.10. Tome $\epsilon = \min\{\epsilon_i/2 : 1 \leq i \leq k\}$. Assim, dados $p, q \in M$, com $d(p,q) < \epsilon$, tem-se que $p \in B(p_{i_0}, \epsilon_{i_0}/2)$, para algum $1 \leq i_0 \leq k$, logo

$$d(q, p_{i_0}) \leq d(q,p) + d(p, p_{i_0}) < \epsilon + \frac{\epsilon_{i_0}}{2} \leq \epsilon_{i_0}.$$

Disso decorre que $p, q \in B(p_{i_0}, \epsilon_{i_0})$, e a afirmação decorre da mesma Proposição 1.4.10. Denote por l o ínfimo dos comprimentos das curvas diferenciáveis por partes em $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ é não-trivial, tem-se que $l > 0$. Considere uma sequência minimizante (η_j) em $\mathcal{C}$ tal que cada η_j está parametrizada no intervalo $[0,1]$, com velocidade constante. Assim,

$$L = \sup_j l(\eta_j)$$

é finito. Escolha uma partição $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ de $[0,1]$, com $t_i - t_{i-1} < \frac{\epsilon}{2L}$, para algum $1 \leq i \leq n$. Então,

$$d(\eta_j(t_{i-1}, \eta_j(t))) \leq \int_{t_{i-1}}^{t} \|\eta_j'(t)\| \mathrm{d}t \leq l(t_i - t_{i-1}) < \frac{\epsilon}{2},$$

para $t_{i-1} \leq t \leq t_i$. Esta estimativa permite-nos trocar cada curva η_j por uma geodésica quebrada γ_j ligando os pontos $\eta_j(0), \eta(t_1), \ldots, \eta_j(1)$. Para cada j, temos que γ_j é homotópica a η_j. De fato, como

$$d(\gamma_j(t), \eta_j(t)) \leq d(\gamma_j(t), \gamma_j(t_{i-1})) + d(\eta_j(t_{i-1}), \eta_j(t)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

para $t_{i-1} \leq t \leq t_i$, podemos construir uma homotopia diferenciável de $\eta_j|_{[t_{i-1}, t_i]}$ em $\gamma_j|_{[t_{i-1}, t_i]}$ usando segmentos de geodésicas de $\eta_j(t)$ a $\gamma_j(t)$. Além disso, como $l(\gamma_j) \leq l(\eta_j)$, segue que (γ_j) também é uma sequência minimizante em $\mathcal{C}$. Usando novamente a compacidade de M, podemos escolher uma subsequência de (γ_j), que denotaremos pelo mesmo símbolo, tal que $(\gamma_j(t_i))$ converge para um ponto p_i quando $j \to +\infty$, para todo índice i. Disso decorre que (γ_j) converge na topologia C^1 para uma geodésica quebrada γ ligando os pontos p_i. Essa curva γ pertence à classe $\mathcal{C}$ e tem comprimento l. Como γ tem comprimento mínimo em $\mathcal{C}$, γ é localmente minimizante e, em virtude do Teorema 1.6.6, γ é uma geodésica. $\square$

O Lema 5.5.1 é falso se M não for compacta. Considere, por exemplo, uma superfície de rotação gerada por uma curva que assintota o eixo de rotação. Como existem curvas arbitrariamente pequenas nas classes livres de homotopia não-triviais, tais classes não admitem curvas de comprimento mínimo.

Observação 5.5.2. No caso de uma variedade Riemanniana compacta e simplesmente conexa, a existência de uma geodésica fechada em M continua verdadeira, embora seja um problema bem mais difícil (cf. [6]). No caso da esfera $\mathbb{S}^2$, por exemplo, toda métrica Riemanniana admite, pelo menos, três geodésicas fechadas geometricamente distintas (cf. [7]). Uma referência sobre este tópico é o excelente livro de Klingenberg [4].

A fim de provar o teorema de Synge, precisaremos de dois lemas, um sobre variedades Riemannianas orientáveis e outro de Álgebra Linear.

Lema 5.5.3. Dado uma variedade Riemanniana orientável M^n, considere uma geodésica fechada $\gamma : [a,b] \to M$, com $\gamma(a) = \gamma(b) = p$. Então, o transporte paralelo ao longo de γ preserva orientação.

Demonstração. Pela Proposição 1.3.4, já sabemos que $P^\gamma_{a,b} : T_pM \to T_pM$ é uma isometria. Resta provar que $\det(P^\gamma_{a,b}) > 0$. Para isso, considere uma n-forma positiva ω em M e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base positiva de T_pM, ou seja,

$$\omega(e_1, \ldots, e_n) > 0.$$

Seja $E_i(t) = P^\gamma_{a,b}(e_i)$ o transporte paralelo do vetor e_i ao longo de γ, com $1 \leq i \leq n$. Então

$$\omega(E_1(t), \ldots, E_n(t)) > 0,$$

para todo $t \in [a,b]$. Em particular, tem-se que $\omega(E_1(b), \ldots, E_n(b)) > 0$. Porém,

$$\omega(E_1(b), \ldots, E_n(b)) = \det(P^\gamma_{a,b})\omega(e_1, \ldots, e_n),$$

de modo que devemos ter $\det(P^\gamma_{a,b}) > 0$, como queríamos. □

Lema 5.5.4. Seja E um espaço vetorial orientado n-dimensional e munido de um produto interno. Se $T : E \to E$ é uma isometria linear satisfazendo $\det T = (-1)^{n+1}$, então existe um vetor $v \in E$ tal que $T(v) = v$.

Demonstração. Se n é ímpar, o polinômio caracterśtico de T é um polinômio real de grau ímpar. Assim, T admite pelo menos um autovalor real que deve ser igual a ± 1, por ser isometria. Por outro lado, os autovalores complexos ocorrem em pares conjugados, λ e $\overline{\lambda}$, com $\lambda \cdot \overline{\lambda} \geq 0$. Assim, o número dos autovalores reais é ímpar. Como $\det T = 1$, pelo menos um destes autovalores deve ser igual a $+1$, provando o Lema neste caso. Caso n seja par, então $\det T = -1$. Como o produto dos autovalores complexos é não-negativo, existe pelo menos um par de autovalores reais, um dos quais sendo positivo e, portanto, igual a $+1$. $\square$

Teorema 5.5.5 (Synge). *Seja M uma variedade Riemanniana compacta com curvatura seccional positiva.*

(i) Se M é orientável e tem dimensão par, então M é simplesmente conexa.

(ii) Se M tem dimensão ímpar, então M é orientável.

Demonstração. (i) Suponha que M não seja simplesmente conexa e seja $\mathcal{C}$ uma classe livre de homotopia não-trivial de caminhos fechados em M. Pelo Lema 5.5.1, existe uma geodésica fechada normalizada $\gamma : [0, l] \to M$ tal que

$$l(\gamma) = l = \inf_{\eta \in \mathcal{C}} l(\eta).$$

Como γ é uma geodésica fechada, o transporte paralelo $P^{\gamma}_{0,l} : T_pM \to T_pM$ satisfaz

$$P^{\gamma}_{0,l}(\gamma'(0)) = \gamma'(0).$$

Além disso, sendo $P^{\gamma}_{0,l}$ uma isometria, $P^{\gamma}_{0,l}$ deixa o complemento ortogonal $\{\gamma'(0)\}^{\perp}$ também invariante. Como a dimensão deste subespaço é ímpar, segue do Lema 5.5.4 que existe um vetor não-nulo $w \in \{\gamma'(0)\}^{\perp}$ tal que $P^{\gamma}_{0,l}(w) = w$. Seja X o transporte paralelo do vetor w ao longo de γ. Temos que $X(0) = w$ e

$$X(l) = P^{\gamma}_{0,l}(w) = w.$$

Considere uma variação $\phi : [0, l] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ de γ cujo campo variacional associado é X. Temos $E'(0) = 0$ e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E''(0) &= -\int_0^l \big(\langle X', X'\rangle + \langle R(X, \gamma')\gamma', X\rangle\big)\, \mathrm{d}t \\ &= -\int_0^l \langle R(X, \gamma')\gamma', X\rangle \mathrm{d}t < 0. \end{aligned}$$

Assim, para t suficientemente pequeno, temos $E(\gamma_t) < E(\gamma)$ e, em virtude do Exercício 4.1.2,

$$l(\gamma_t)^2 \leq 2lE(\gamma_t) < 2lE(\gamma) = l(\gamma)^2.$$

Isso contradiz o fato que γ tem comprimento mínimo em $\mathcal{C}$. Portanto, a classe $\mathcal{C}$ não existe e M deve ser simplesmente conexa.

(ii) Suponha que M não seja orientável, logo M não é simplesmente conexa. Assim, existe uma classe livre de homotopia não-trivial $\mathcal{C}$ em M tal que para toda curva fechada $\gamma : [0,1] \to M$ em $\mathcal{C}$, tem-se $\det P^{\gamma}_{0,1} = -1$. Seja γ a geodésica fechada em $\mathcal{C}$ de comprimento mínimo, dada pelo Lema 5.5.1. Como $P^{\gamma}_{0,1}(\gamma'(0)) = \gamma'(0)$, temos

$$\det(P^{\gamma}_{0,1}|_E) = -1,$$

onde $E = \{\gamma'(0)\}^{\perp}$. Como E tem dimensão par concluimos, em virtude do Lema 5.5.4, que existe um vetor $v \in E$ tal que $P^{\gamma}_{0,1}(v) = v$. Argumentando de forma análoga ao item (i) concluiremos que γ não é minimal na classe $\mathcal{C}$, o que leva a uma contradição. Portanto, M deve ser orientável. $\square$

5.6 O teorema de Bonnet-Myers

Nesta seção veremos um resultado que é um típico resultado de comparação em Geometria Riemanniana. Note que, no enunciado abaixo, o lado direito de (5.20) é exatamente a curvatura de Ricci da esfera $\mathbb{S}^n_r$.

Teorema 5.6.1 (Bonnet-Myers)**.** *Dado uma variedade Riemanniana completa M^n, assuma que exista uma constante $r > 0$ tal que*

$$Ric_p(v,v) \geq \frac{n-1}{r^2}\langle v, v\rangle, \tag{5.20}$$

para quaisquer $p \in M$ e $v \in T_pM$. Então

$$diam(M) \leq diam(\mathbb{S}^n_r) = \pi r.$$

Em particular, M é compacta e tem grupo fundamental finito.

Demonstração. Dados $p, q \in M$, mostremos que a distância entre p e q é limitada superiormente por πr. Como M é completa, existe uma geodésica normalizada minimizante $\gamma : [0,a] \to M$, com $\gamma(0) = p$ e $\gamma(a) = q$, logo

$$I(X,X) \geq 0, \tag{5.21}$$

para todo campo vetorial X ao longo de γ que se anula nas extremidades, em virtude do Corolário 4.1.7. Considere agora uma base ortonormal

$\{e_1, \ldots, e_n\}$ de T_pM, com $e_1 = \gamma'(0)$, e estenda a um referencial ortonormal paralelo $\{E_1, \ldots, E_n\}$ ao longo de γ. Note que $E_1(t) = \gamma'(t)$. Defina

$$X_i(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{a}\right) E_i(t),$$

para $1 \leq i \leq n$. Então,

$$\begin{aligned} I(X_i, X_i) &= \int_0^a \left(\langle X_i', X_i'\rangle + \langle R(\gamma', X_i)X_i, \gamma'\rangle\right) \mathrm{d}t \\ &= -\int_0^a \left(\langle X_i'', X_i\rangle + \langle R(\gamma', X_i)\gamma', X_i\rangle\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi t}{a}\right)\left(\frac{\pi^2}{a^2} - \langle R(\gamma', E_i)\gamma', E_i\rangle\right) \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Como cada campo X_i se anula nas extremidades $t = 0$ e $t = a$, segue de (5.21) que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=2}^{n} I(X_i, X_i) = \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi t}{a}\right)\left[(n-1)\frac{\pi^2}{a^2} - Ric(\gamma', \gamma')\right] \mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi t}{a}\right)\left[(n-1)\frac{\pi^2}{a^2} - \frac{(n-1)}{r^2}\right] \mathrm{d}t \\ &= (n-1)\left(\frac{\pi^2}{a^2} - \frac{1}{r^2}\right)\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi t}{a}\right) \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

onde usamos a hipótese na curvatura de Ricci. Isso prova que

$$d(p, q) = a \leq \pi r,$$

implicando que $\operatorname{diam}(M) \leq \pi r$. Para a segunda afirmação, note que, como M é completa e tem diâmetro limitado, segue que M é compacta em virtude do Corolário 2.1.9. Finalmente, considere o recobrimento universal $\pi : \tilde{M} \to M$ de M. Como $\tilde{M}$ é completa e π é isometria local, $\tilde{M}$ satisfaz as mesmas hipóteses na curvatura de Ricci de M. Pelo que acabamos de provar, concluimos que $\tilde{M}$ é compacta, logo o número de folhas do recobrimento é finito. Como este é o número dos elementos do grupo fundamental $\pi_1(M)$ de M, concluimos que $\pi_1(M)$ é finito. $\square$

Observação 5.6.2. A hipótese sobre a curvatura de Ricci no enunciado do Teorema 5.6.1 não pode ser enfraquecida no sentido de exigir que a curvatura de Ricci seja somente positiva. Por exemplo, o hiperboloide de duas folhas

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = -1\},$$

com a métrica induzida de $\mathbb{R}^3$, é completa, não-compacta e tem curvatura Gaussiana em um ponto (x, y, z) dada por $1/(x^2 + y^2 + z^2)^2$ que, apesar de ser positiva, tende a zero quando os pontos tendem a infinito.

5.7 Variedades de curvatura seccional não-positiva

Neste seção discutiremos alguns resultados envolvendo variedades Riemannianas de curvatura seccional não-positiva, os quais podem ser obtidos considerando-se funções convexas apropriadas na variedade.

Lembremos que uma função contínua $f : I \to \mathbb{R}$, definida num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, é dita *convexa* se

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y),$$

para quaisquer $t \in [0, 1]$ e $x, y \in I$. Se f é derivável, esta condição equivale a exigir que $f'' \geq 0$. No caso de uma função contínua f em uma variedade Riemanniana completa M, dizemos que f é *convexa* se sua restrição $f \circ \gamma$ é convexa, para toda geodésica γ de M.

Lema 5.7.1. Se as curvaturas seccionais de uma variedade Riemanniana M ao longo de uma geodésica γ são não-positivas, então não existem pontos conjugados ao longo de γ.

Demonstração. Seja X um campo de Jacobi ao longo de γ. Afirmamos que a função $f = \|X\|^2$ é convexa. De fato, derivando f duas vezes e usando a equação de Jacobi (4.7), obtemos

$$\begin{aligned} f'' &= 2\left(\langle X'', X\rangle + \|X'\|^2\right) \\ &= 2\left(\langle R(\gamma', X)\gamma', X\rangle + \|X'\|^2\right) \\ &= 2\left(-\langle R(\gamma', X)X, \gamma'\rangle + \|X'\|^2\right) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

onde usamos a hipótese sobre a curvatura de M ao longo de γ. Isso mostra que f é convexa. Além disso, se $t_1 < t_2$ são tais que $f(t_1) = f(t_2) = 0$ então, pelo Exercício 5.7.1, concluimos que $f|_{[t_1,t_2]} \equiv 0$, implicando que X é trivial. Portanto, não existem pontos conjugados ao longo de γ. □

Teorema 5.7.2 (Hadamard)**.** *Seja M uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional não-positiva. Então, para todo ponto $p \in M$, a aplicação exponencial $\exp_p : T_pM \to M$ é um recobrimento Riemanniano. Em particular, M é difeomorfa a $\mathbb{R}^n$ se for simplesmente conexa.*

Demonstração. Em virtude do Lema 5.7.1 segue que, fixado $p \in M$, a aplicação exponencial $\exp_p : T_pM \to M$ é um difeomorfismo local. Assim, podemos munir o espaço tangente T_pM com a métrica pull-back $\langle , \rangle = \exp_p^* \langle , \rangle$. Como isometria local transforma geodésicas em geodésicas, as geodésicas de T_pM que passam pela origem são retas definidas em todo $\mathbb{R}$ devido à completude de M. Pelo Teorema de Hopf-Rinow 2.1.7 segue que $(T_pM, \langle , \rangle)$ é completa, e o Teorema 2.2.12 implica que $\exp_p$ é um recobrimento Riemanniano. Finalmente, se M for simplesmente conexa, então $\exp_p : T_pM \to M$ é um difeomorfismo global. □

Em virtude do Teorema 5.7.2, uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e de curvatura seccional não-positiva é usualmente chamada de *variedade de Hadamard*.

Corolário 5.7.3. Quaisquer dois pontos em uma variedade de Hadamard podem ser ligados por uma única geodésica.

Demonstração. Dados dois pontos $p, q \in M$, seja γ uma geodésica ligando p e q, e considere o difeomorfismo $\exp_p : T_pM \to M$. Então, $\exp_p^{-1} \circ \gamma$ é a reta em T_pM ligando a origem e $\exp_p^{-1}(q)$, mostrando a unicidade de γ. □

Corolário 5.7.4. O cut locus de qualquer ponto em uma variedade de Hadamard é vazio.

Demonstração. De fato, se um ponto q pertencesse ao cut locus $\mathrm{Cut}(p)$, ao logo de uma geodésica γ, então pelo Teorema 5.7.2 a aplicação exponencial $\exp_p$ não seria um difeomorfismo sobre M. □

O Teorema 5.7.2 afirma que o recobrimento universal de uma variedade Riemanniana completa M^n, de curvatura seccional não-positiva, é $\mathbb{R}^n$. Como $\mathbb{R}^n$ é simplesmente conexo, os grupos de homotopia $\pi_i(M)$ são todos triviais, para $i \geq 2$. Assim, as informações topológicas sobre M estão contidas em seu grupo fundamental $\pi_1(M)$.

5.8 Exercícios

5.1

1. Dado uma imersão isométrica $f : M \to \tilde{M}$, mostre que $\nabla^\perp$ é uma conexão compatível em $TM^\perp$.

2. Considere a imersão isométrica $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$f(u,v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u \sin u, \cos v \sin v).$$

(a) Considere os campos vetoriais

$$X_1 = (-\sin u, \cos u, 0, 0), \quad X_2 = (0, 0, -\sin v, \cos v)$$

e

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u, \sin u, -\cos v, -\sin v), \quad \xi_2 = f.$$

Mostre que X_1, X_2 são tangente a f e ξ_1, ξ_2 são normais a f.

(b) Mostre que

$$\tilde{\nabla}_{X_1}\xi_1 = X_1, \quad \tilde{\nabla}_{X_2}\xi_1 = -X_2, \quad \tilde{\nabla}_{X_1}\xi_2 = X_1, \quad \tilde{\nabla}_{X_2}\xi_2 = X_2,$$

onde $\tilde{\nabla}$ denota a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{R}^4$.

(c) Conclua que a imersão isométrica induzida de

$$T^2 = \mathbb{S}^1(1/\sqrt{2}) \times \mathbb{S}^1(1/\sqrt{2})$$

em $\mathbb{S}^3$ é mínima, conhecida usualmente como *toro de Clifford*.

(d) Use a equação de Gauss em $\mathbb{R}^4$ e em $\mathbb{S}^3$ para mostrar que a curvatura seccional de T^2 é identicamente nula obtendo, assim, um exemplo de toro flat.

5.3

1. Seja $\gamma : [a,b] \to M$ uma geodésica em M, com $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$. Prove que se p e q não são conjugados ao longo de γ, então dados vetores $v \in T_pM$ e $w \in T_qM$, existe um único campo de Jacobi X ao longo de γ tal que $X(a) = v$ e $X(b) = w$.

5.4

1. Dados uma forma espacial $(M, \langle , \rangle)$ de curvatura seccional constante igual a k e um número real $\lambda > 0$, mostre que $(M, \lambda\langle , \rangle)$ é uma forma espacial de curvatura $\lambda^{-1}k$.

2. Sejam $f, g : M \to N$ isometrias locais, com M conexa, e $p \in M$ tal que $f(p) = g(p)$ e $\mathrm{d}f(p) = \mathrm{d}g(p)$. Mostre que $f = g$.

5.5

1. Considere a variedade diferenciável $M = \mathbb{R}P^2 \times N^{2n+1}$, onde N é uma variedade compacta. Mostre que M não pode ser munida de uma métrica de curvatura positiva.

5.6

1. Seja M uma variedade Riemanniana.

(i) Se M tem curvaturas seccionais positivas em um ponto $p \in M$, mostre que existe $\delta > 0$ tal que $K_p > \delta$.

(ii) Se M é homogênea e existe um ponto $p \in M$ tal que $K_p > 0$, mostre que M é compacta e tem grupo fundamental finito. Conclua daí que o paraboloide $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$, com a métrica induzida de $\mathbb{R}^3$, não pode ser uma superfície homogênea.

2. Considere a variedade diferenciável $M = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

(i) Calcule o recobrimento universal de M.

(ii) Mostre que M, munida da métrica produto, tem curvaturas seccionais não-negativas.

(iii) Mostre que M não pode ser munida de uma métrica com curvaturas seccionais positivas.

3. Mostre que o toro $T^n = \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$ não pode ser munido de uma métrica de curvatura positiva.

5.7

1. Se uma função convexa em uma variedade Riemanniana completa admite dois pontos de mínimos globais, mostre que uma geodésica ligando estes dois pontos também consiste de mínimos globais da função. Portanto, a função é constante ao longo do segmento geodésico.

2. Considere uma variedade Riemanniana M^n que admite um referencial ortonormal $\{E_1, \ldots, E_n\}$ globalmente definido. Introduza em M^n a conexão ∇ tal que $\nabla_{E_i} E_j = 0$, para quaisquer i, j. Prove que se M é compacta e simplesmente conexa, então ∇ não pode ser compatível com nenhuma métrica Riemanniana.

3. Mostre que a variedade Riemanniana produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ não pode ser munida de uma métrica com curvaturas seccionais não-positivas.

4. Considere a variedade diferenciável $M = \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^n$.

(i) Mostre que M não pode ser munida de uma métrica com curvatura não-positiva.

(ii) Mostre que M não pode ser munida de uma métrica com curvatura positiva.

Referências Bibliográficas

[1] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, 1988.

[2] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, 1976.

[3] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Universitext, Springer.

[4] W. Klingenberg, *Lectures on closed geodesics*, Springer-Verlag, no. 230, 1978.

[5] J. M. Lee, *Riemannian Geometry: An Introduction to Curvature*, Graduate Texts in Mathematics, vol 176, Springer.

[6] L. A. Lyusternik, A. I. Fet, *Variational problems on closed manifolds*, Doklady Akad. Nauk SSSR **81** (1951), 17–18.

[7] L. Lyusternik, L. Snirel'man, *Topological methods in variational problems and their application to the differential geometry of surfaces*, Uspehi Matem. Nauk **2** (1947), no. 1 (17), 166–217.

[8] W. H. Meeks III, J. Pérez, *Constant mean curvature surfaces in metric Lie groups*, Contemp. Math., **570**, Amer. Math. Soc., (2012), 25–110.

[9] S. B. Myers, N. E. Steenrod, *The group of isometries of a Riemannian manifold*. Ann. of Math. (2) **40** (1939), no. 2, 400–416.

[10] B. O'Neill, *The fundamental equations of a submersion*, Michigan Math. J. **13** (1966), 459–469.

[11] P. Petersen, *Riemannian Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol 171, Springer.

[12] M. Spivak, em A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, vol. 1, Publish or Perish, Inc., 1999.