Notas das aulas

Introdução à Geometria Riemanniana

Curso de difusão USP

Fernando Manfio

ICMC – USP

1º Semestre de 2025

Sumário

1 Diferenciabilidade no espaço Euclidiano **1**

1.1 A topologia de $\mathbb{R}^n$ 1
1.2 Aplicações contínuas 6
1.3 Subespaços topológicos 12
1.4 Aplicações diferenciáveis 16
1.5 O teorema da aplicação inversa 23

2 Subvariedades Euclidianas **25**

2.1 Subvariedades Euclidianas 26
2.2 Valores regulares 29
2.3 O espaço tangente 32
2.4 Mudança de coordenadas 35
2.5 Exercícios 39
2.6 Apêndice 2: O teorema da invariância do domínio 41

3 Variedades diferenciáveis **42**

3.1 Variedades diferenciáveis 42
3.2 A topologia de uma variedade diferenciável 47
3.3 Aplicações diferenciáveis 51
3.4 A diferencial de uma aplicação diferenciável 54
3.5 Exercícios 62
3.6 Apêndice: Fatos básicos de topologia 66

4 Subvariedades **69**

4.1 Aplicações de posto constante 70
4.2 Imersões 71
4.3 Submersões 74
4.4 Subvariedades 75
4.5 Mergulhos 78

4.6 Valores regulares . . . 80
4.7 Exercícios . . . 83

5 Campos vetoriais **87**
5.1 O fibrado tangente . . . 87
5.2 Campos vetoriais . . . 91
5.3 Derivações lineares . . . 92
5.4 Derivação em variedades . . . 97
5.5 Exercícios . . . 102

6 Métricas Riemannianas e Conexões **104**
6.1 Métricas Riemannianas . . . 104
6.2 A conexão de Levi-Civita . . . 107
6.3 Exercícios . . . 113

Referências Bibliográficas **114**

Capítulo 1

Diferenciabilidade no espaço Euclidiano

1.1 A topologia de $\mathbb{R}^n$

O *espaço Euclidiano de dimensão* n, denotado por $\mathbb{R}^n$, é o produto cartesiano de n cópias de $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}.$$

Assim, os pontos de $\mathbb{R}^n$ são da forma $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, cujas coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números reais. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, com $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, e um número real α, definimos a *soma* $x + y$ e o *produto por escalar* $\alpha \cdot x$ em $\mathbb{R}^n$ pondo

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \\ \alpha \cdot x &= (\alpha \cdot x_1, \ldots, \alpha \cdot x_n). \end{aligned} \tag{1.1}$$

As operações em (1.1) tornam $\mathbb{R}^n$ um espaço vetorial real de dimensão n. Desta forma, podemos expressar qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^n$ como combinação linear

$$x = x_1 \cdot e_1 + \ldots + x_n \cdot e_n,$$

onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Uma *norma* em $\mathbb{R}^n$ é uma função real $\|\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) Se $x \neq 0$, então $\|x\| > 0$,

(ii) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. A propriedade (iii) é conhecida usualmente como a *desigualdade triangular*.

Exemplo 1.1.1. Podemos considerar várias normas em $\mathbb{R}^n$, algumas das quais de manipulação simples. Por exemplo, as normas *Euclidiana*, do *máximo* e da *soma* são definidas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2}, \\ \|x\|_M &= \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}, \\ \|x\|_S &= |x_1| + \ldots |x_n|. \end{aligned} \tag{1.2}$$

As funções em (1.2) satisfazem facilmente as condições (i) e (ii) da definição de norma. Vejamos como as normas do máximo e da soma verificam a desigualdade triangular. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se

$$\begin{aligned} \|x + y\|_M &= \max\{|x_1 + y_1|, \ldots, |x_n + y_n|\} \\ &= |x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \\ &\leq \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} + \max\{|y_1|, \ldots, |y_n|\} \\ &= \|x\|_M + \|y\|_M \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|x + y\|_S &= |x_1 + y_1| + \ldots + |x_n + y_n| \\ &\leq (|x_1| + \ldots + |x_n|) + (|y_1| + \ldots + |y_n|) \\ &= \|x\|_S + \|y\|_S. \end{aligned}$$

A desigualdade triangular para a norma Euclidiana é consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz que veremos a seguir.

Um *produto interno* em $\mathbb{R}^n$ é simplesmente uma função $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que é bilinear, simétrica e positivo definida. Um exemplo simples é o *produto interno canônico* de $\mathbb{R}^n$, o qual é definido por

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n,$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$. Neste caso, a norma Euclidiana pode ser escrita como

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. A desigualdade seguinte, conhecido como *desigualdade de Cauchy-Schwarz*, estabelece uma desigualdade fundamental em $\mathbb{R}^n$. Mais precisamente, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \tag{1.3}$$

valendo a igualdade se, e somente se, um dos vetores é múltiplo do outro.

Usando a desigualdade (1.3), podemos provar que a norma Euclidiana satisfaz a desigualdade triangular. De fato, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\ &= \big(\|x\| + \|y\|\big)^2. \end{aligned}$$

Disso decorre que $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, como queríamos.

Duas normas $\| \|_1$ e $\| \|_2$ em $\mathbb{R}^n$ são ditas *equivalentes* se existem constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\|x\|_1 \leq \alpha \|x\|_2 \quad \text{e} \quad \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1, \tag{1.4}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Note que, dado $x \in \mathbb{R}^n$, para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se

$$\begin{aligned} \|x\|_M &= |x_i| = \sqrt{x_i^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2} \\ &\leq \sqrt{x_1^2} + \ldots + \sqrt{x_n^2} = |x_1| + \ldots + |x_n| \\ &\leq n|x_i| = n\|x\|_M, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|x\|_M \leq \|x\| \leq \|x\|_S \leq n\|x\|_M. \tag{1.5}$$

Decorre das desigualdades em (1.5) que as normas Euclidiana, do máximo e da soma, dadas em (1.2), são duas a duas equivalentes.

Uma norma em $\mathbb{R}^n$ possibilita-nos definir algumas noções geométricas básicas, como veremos a seguir. Por questão de simplicidade, iremos sempre considerar a norma Euclidiana. A *bola aberta* de centro num ponto $p \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$, denotada por $B(p, r)$, é o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto p é menor do que r. Ou seja,

$$B(p, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - p\| < r\}.$$

Da mesma forma, definimos a *bola fechada* $B[p,r]$ com centro em $p \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$, pondo

$$B[p,r] = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - p\| \leq r\}.$$

Considere um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $p \in X$ chama-se um *ponto interior* de X se existe $r > 0$ tal que $B(p,r) \subset X$. O *interior* de X, denotado por $\operatorname{int}(X)$, é o subconjunto de X formado pelos pontos interiores de X.

Definição 1.1.2. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se *aberto* em $\mathbb{R}^n$ se todos os seus pontos são interiores, ou seja, quando $\operatorname{int}(X) = X$.

Vejamos um exemplo simples de conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.1.3. Toda bola aberta $B(p,r)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$. De fato, dado um ponto $x \in B(p,r)$, tome $\delta = r - \|x - p\| > 0$. Afirmamos que $B(x,\delta) \subset B(p,r)$. De fato, dado $y \in B(x,\delta)$, temos

$$\|y - p\| \leq \|y - x\| + \|x - p\| < \delta + \|x - p\| = r.$$

Isso mostra que $y \in B(p,r)$. Como y foi escolhido de forma arbitrária em $B(x,\delta)$, mostramos que $B(x,\delta) \subset B(p,r)$ e, assim, $B(p,r)$ é aberto.

Dados um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ e um ponto $p \in \mathbb{R}^n$, existem três possibilidades excludentes: ou $p \in \operatorname{int}(X)$, ou $p \in \operatorname{int}(\mathbb{R}^n - X)$ ou então toda bola aberta de centro em p contém pontos de X e $\mathbb{R}^n - X$. Os pontos com esta propriedade constituem a *fronteira* ∂X de X. Assim, X é aberto em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, $X \cap \partial X = \emptyset$.

Dado uma família arbitrária $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, valem as igualdades

$$\mathbb{R}^n - \bigcup_\alpha F_\alpha = \bigcap_\alpha (\mathbb{R}^n - F_\alpha) \quad \text{e} \quad \mathbb{R}^n - \bigcap_\alpha F_\alpha = \bigcup_\alpha (\mathbb{R}^n - F_\alpha). \tag{1.6}$$

Usando as propriedades (1.6), pode-se provar a seguinte

Proposição 1.1.4. Os conjuntos abertos têm as seguintes propriedades:

(a) $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ são abertos.

(b) A interseção de uma coleção finita de abertos é um conjunto aberto.

(c) A união de uma família qualquer de abertos é um conjunto aberto.

A coleção de todos os conjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ constitui, segundo a Proposição 1.1.4, a *topologia usual* de $\mathbb{R}^n$, e será essa a topologia considerada em $\mathbb{R}^n$.

Exercícios

1. Mostre que, se $x, y \in \mathbb{R}^n$ são não-nulos e tais que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, então x e y são múltiplos um do outro. Além disso, mostre que isso é falso nas normas $\|\|_M$ e $\|\|_S$.

2. Uma norma $\|\|$ em $\mathbb{R}^n$ *provém* de um produto interno $\langle , \rangle$ se vale a relação $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Prove que toda norma $\|\|$ em $\mathbb{R}^n$, que provém de um produto interno, satisfaz a *identidade do paralelogramo*:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big),$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$. Conclua que as normas $\|\|_M$ e $\|\|_S$ não provêm de um produto interno.

3. Prove que quaisquer duas normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.

4. Prove que, para qualquer subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, $\mathrm{int}(X)$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$ que contém qualquer conjunto aberto contido em X.

5. Prove que o conjunto $X = \mathbb{R}^n - B[p,r]$, o complementar da bola fechada $B[p,r]$ em $\mathbb{R}^n$, é aberto em $\mathbb{R}^n$.

1.2 Aplicações contínuas

Considere uma aplicação $f\colon X \to \mathbb{R}^n$, definida num subconjunto aberto $X \subset \mathbb{R}^m$, onde temos fixado uma norma em $\mathbb{R}^m$ e outra norma em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.2.1. Dizemos que $f\colon X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é *contínua num ponto* $p \in X$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X \text{ e } \|x - p\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(p)\| < \epsilon. \tag{1.7}$$

Dizemos simplesmente que f é *contínua* se for contínua em todos os pontos do seu domínio X.

A definição de continuidade para aplicações entre espaços Euclidianos, dada na Definição 1.2.1, parte do princípio que fixemos uma norma no domínio e outra no contra-domínio. O ponto importante é que a definição não é afetada se substituirmos as normas por outras que sejam, respectivamente, equivalentes. Como quaisquer duas normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes, a Definição 1.2.1 está bem posta.

Em termos de bolas abertas, a continuidade de f no ponto $p \in X$ se exprime como sendo: para qualquer bola aberta $B(f(p), \epsilon) \subset \mathbb{R}^n$, com centro no ponto $f(p)$, existe uma bola aberta $B(p, \delta) \subset \mathbb{R}^m$, com centro em $p \in X$, tal que

$$x \in B(p, \delta) \cap X \Rightarrow f(x) \in B(f(p), \epsilon),$$

ou seja,

$$f(B(p, \delta) \cap X) \subset B(f(p), \epsilon).$$

Decorre diretamente da definição que se $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ é contínua então, para cada aberto $A \subset \mathbb{R}^m$, com $A \subset X$, a restrição $f|_A\colon A \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua. Além disso, a continuidade é um conceito local. Mais precisamente, se cada ponto $p \in X$ é centro de uma bola aberta $B(p, r)$ tal que a restrição $f|_{X \cap B(p,r)}$ é contínua, então $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ é contínua. Vejamos a seguir alguns exemplos de aplicações contínuas.

Exemplo 1.2.2. Toda aplicação linear $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua. De fato, dado $p \in \mathbb{R}^m$, temos

$$\|T(x) - T(p)\| = \|T(x - p)\| \leq \|T\| \cdot \|x - p\|,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^m$, onde $\|T\|$ denota a norma espectral em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ dada por

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in \mathbb{R}^m,\ \|x\| = 1\}.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \epsilon/\|T\|$. Portanto, todo $x \in \mathbb{R}^m$ satisfazendo $\|x - p\| < \delta$, tem-se $\|T(x) - T(p)\| < \epsilon$, mostrando que T é contínua em p.

Exemplo 1.2.3. Uma classe mais geral das aplicações lineares são as aplicações Lipschitzianas, i.e., aplicações $f\colon X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ para as quais existe uma constante $k > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|,$$

para quaisquer $x, y \in X$. Como no Exemplo 1.2.2, fixado $p \in X$ e dado $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta = \epsilon/k$. Em particular, toda aplicação $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ que é de Lipschitz em cada parte limitada de $\mathbb{R}^m$ é contínua.

Exemplo 1.2.4. Toda norma $\|\|$ em $\mathbb{R}^n$ é uma função contínua. De fato, fazendo $f(x) = \|x\|$ e fixado $p \in \mathbb{R}^n$, temos:

$$|f(x) - f(p)| = |\|x\| - \|p\|| \leq \|x - p\|,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Assim, dado $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta = \epsilon$.

Exemplo 1.2.5. Toda aplicação bilinear $\varphi\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é contínua. De fato, basta mostrar que φ é uma aplicação Lipschitziana em cada parte limitada de $\mathbb{R}^{m+n}$. Seja $\|\|_S$ a norma da soma em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{m+n}$ e denote por

$$c = \max\{\|\varphi(e_i, e_j)\| : 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n\}.$$

Dados $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$, com

$$x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i \quad \text{e} \quad y = \sum_{j=1}^{m} y_j e_j,$$

temos

$$\|x\|_S \cdot \|y\|_S = \sum_{i,j=1}^{n} |x_i| \cdot |y_j| \quad \text{e} \quad \varphi(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|\varphi(x, y)\| &\leq \sum_{i,j=1}^{n} |x_i| \cdot |y_j| \cdot \|\varphi(e_i, e_j)\| \leq c \sum_{i,j=1}^{n} |x_i| \cdot |y_j| \\ &= c \cdot \|x\|_S \cdot \|y\|_S. \end{aligned}$$

Sejam agora $z, z' \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, com $z = (x, y)$ e $z' = (x', y')$. Temos:

$$\begin{aligned} \|\varphi(z) - \varphi(z')\| &= \|\varphi(x, y) - \varphi(x', y')\| \\ &= \|\varphi(x, y) - \varphi(x, y') + \varphi(x, y) - \varphi(x', y')\| \\ &= \|\varphi(x, y - y') + \varphi(x - x', y')\| \\ &\leq \|\varphi(x, y - y')\| + \|\varphi(x - x', y')\| \\ &\leq c \cdot \big(\|x\|_S \cdot \|y - y'\|_S + \|x - x'\|_S \cdot \|y'\|\big). \end{aligned}$$

Se $z, z' \in B[0, r] \subset \mathbb{R}^{m+n}$ tem-se, em particular, que $\|x\|_S \leq r$ e $\|y\|_S \leq r$. Assim,

$$\begin{aligned} \|\varphi(z) - \varphi(z')\| &\leq c \cdot r\big(\|x - x'\|_S + \|y - y'\|_S\big) \\ &= c \cdot r\|z - z'\|_S. \end{aligned}$$

Portanto, φ é Lipschitz em cada bola $B[0, r]$ do espaço $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, com constante de Lipschitz $c \cdot r$, logo é contínua. Em particular, o produto interno e a multiplicação de matrizes são aplicações contínuas.

Exemplo 1.2.6. As projeções $\pi_1 \colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $\pi_2 \colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dadas por $\pi_1(x, y) = x$ e $\pi_2(x, y) = y$, são contínuas pois satisfazem a condição de Lipschitz

$$\|\pi_1(x, y) - \pi_1(p, q)\| = \|x - p\| \leq \|(x, y) - (p, q)\|.$$

O resultado seguinte nos dá uma *caracterização topológica* do conceito de continuidade. Mais precisamente, podemos reescrever (1.7) em termos da noção de conjunto aberto.

Teorema 1.2.7. *Uma aplicação $f \colon X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua num ponto $p \in X$ se, e somente se, para todo aberto V de $\mathbb{R}^n$, com $f(p) \in V$, existe um aberto U de $\mathbb{R}^m$, com $p \in U \subset X$, tal que $f(U) \subset V$.*

Demonstração. Suponha f contínua em $p \in X$ e considere um aberto V de $\mathbb{R}^n$, com $f(p) \in V$. Assim, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(f(p), \epsilon) \subset V$. Como f é contínua em p, existe uma bola aberta $U = B(p, \delta) \subset X$ tal que

$$f(U) = f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \epsilon) \subset V,$$

provando a condição necessária. Reciprocamente, dado $\epsilon > 0$, considere a bola aberta $V = B(f(p), \epsilon)$. Por hipótese, existe um aberto U de $\mathbb{R}^m$, com $p \in U \subset X$, tal que $f(U) \subset V$. Sendo U aberto, existe $\delta > 0$ tal que $B(p, \delta) \subset U$. Assim,

$$f(B(p, \delta) \subset f(U) \subset V = B(f(p), \epsilon),$$

e isso mostra que f é contínua em p. $\square$

Como consequência direta do Teorema 1.2.7, tem-se

Corolário 1.2.8. Uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua se, e somente se, para todo conjunto aberto V em $\mathbb{R}^n$, $f^{-1}(V)$ é aberto em X.

Demonstração. Observe que todo aberto V em $\mathbb{R}^n$ é um aberto que contém cada um de seus pontos. Assim, pelo Teorema 1.2.7, f é contínua se, e somente se, para cada tal aberto V, o conjunto $f^{-1}(V)$ é um aberto em X que contém todos os seus pontos, ou seja, se, e somente se, $f^{-1}(V)$ é aberto em X. □

Dados um aberto $X \subset \mathbb{R}^m$ e uma aplicação $f\colon X \to \mathbb{R}^n$, podemos escrever

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)),$$

para todo $x \in X$, onde $f_1, \ldots, f_n\colon X \to \mathbb{R}$ são as *funções coordenadas* de f definidas por $f_i = \pi_i \circ f$, para $1 \leq i \leq n$.

Proposição 1.2.9. A aplicação $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ é contínua num ponto $p \in X$ se, e somente se, cada uma de suas funções coordenadas f_i é contínua em p.

Demonstração. Se f é contínua em $p \in X$, a continuidade das f_i decorre da regra da cadeia (cf. Exercício 1.2.1). Reciprocamente, suponha que cada $f_i\colon X \to \mathbb{R}$ seja contínua em p. Assim, dado $\epsilon > 0$, existem $\delta_1, \ldots, \delta_n > 0$ tais que

$$x \in X \text{ e } \|x - p\| < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(p)| < \epsilon.$$

Considere a norma do máximo em $\mathbb{R}^n$ e seja $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Assim, para todo $x \in X$, com $\|x - p\| < \delta$, tem-se

$$\|f(x) - f(p)\| = \max\{|f_i(x) - f_i(p)| : 1 \leq i \leq n\} < \epsilon,$$

provando que f é contínua em p. □

Um *homeomorfismo* entre dois abertos $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ é uma bijeção contínua $f\colon X \to Y$, cuja inversa $f^{-1}\colon Y \to X$ também é contínua. Neste caso, dizemos que X e Y são *abertos homeomorfos*.

É intuitivo esperar que uma bola aberta de $\mathbb{R}^m$ só é homeomorfa a uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$ quando $m = n$. Isso é verdade, e a demonstração desse fato faz uso de um importante teorema de Topologia, cuja demonstração o leitor pode encontrar em [15, Theorem 36.5].

Teorema 1.2.10 (Invariância do domínio)**.** *Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação injetora e contínua, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Então $f(U)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e f é um mergulho.*

Corolário 1.2.11. Se uma bola aberta de $\mathbb{R}^m$ é homeomorfa a uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$, então $m = n$.

Demonstração. Como uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$ é homeomorfa a $\mathbb{R}^n$, podemos supor que as bolas abertas sejam os espaços $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$. Suponha, por absurdo, que $m > n$, e considere o homeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ entre os espaços Euclidianos. Denotando por $i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o mergulho canônico

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m,$$

obtemos um mergulho $\xi = i \circ \varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ que a cada ponto $x \in \mathbb{R}^m$ associa o ponto $\xi(x) = (\varphi(x), 0) \in \mathbb{R}^m$. No entanto, a imagem de $\mathbb{R}^m$ pelo mergulho ξ não é um aberto em $\mathbb{R}^m$, contradizendo o Teorema 2.6.2. $\square$

Exercícios

1. Prove que a composta de duas aplicações contínuas também é contínua. Ou seja, dados dois abertos $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$, e duas aplicações $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ e $g\colon Y \to \mathbb{R}^k$, sendo f contínua num ponto $p \in X$, $f(X) \subset Y$ e g contínua em $f(p)$, então a composta $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}^k$ é contínua em p.

2. Dados $a, \lambda \in \mathbb{R}$, com $\lambda \neq 0$, considere a translação $T_a\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e a homotetia $H_\lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dadas por

$$T_a(x) = x + a \quad \text{e} \quad H_\lambda(x) = \lambda \cdot x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Prove que T_a e H_λ são contínuas.

3. Prove que quaisquer duas bolas abertas em $\mathbb{R}^n$ são homeomorfas.

4. Prove que toda bola aberta em $\mathbb{R}^n$ é homeomorfa ao espaço $\mathbb{R}^n$.

1.3 Subespaços topológicos

O espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, considerado como espaço topológico, é uma união de conjuntos abertos, essenciais para o conceito de continuidade. No entanto, as vezes se faz necessário considerar aplicações definidas em certos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que não são necessariamente abertos. Além disso, a fim de se discutir continuidade de tais aplicações, precisamos munir tais subconjuntos de uma topologia.

Denotemos por τ a coleção de todos os subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$, segundo a Definição 1.1.2. Como vimos na Proposição 1.1.4, tal coleção define uma topologia em $\mathbb{R}^n$, conhecida como a *topologia usual* de $\mathbb{R}^n$. Se X é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, a coleção

$$\tau_X = \{X \cap U : U \in \tau\}$$

define uma topologia em X, chamada a *topologia induzida*. Com esta topologia, X é chamado um *subespaço topológico* de $\mathbb{R}^n$; os conjuntos abertos de X consistem de todas as interseções dos abertos de $\mathbb{R}^n$ com X. Deixamos a cargo do leitor verificar que τ_X é uma topologia.

Exemplo 1.3.1. Considere o intervalo fechado $[0, 1]$ como subconjunto da reta real $\mathbb{R}$, munida da topologia usual. O intervalo $(1/2, 1]$ é aberto em $[0, 1]$ mas não é aberto em $\mathbb{R}$, pois $(1/2, 1] = [0, 1] \cap (1/2, 2)$.

Considere agora dois subespaços topológicos $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$.

Definição 1.3.2. Uma aplicação $f\colon X \to Y$ é dita ser *contínua* se para cada aberto V de Y, o conjunto $f^{-1}(V)$ é um subconjunto aberto de X.

Todas as propriedades das aplicações coninuas entre abertos do espaço Euclidiano continuam válidas neste contexto. Apresentamos a seguir apenas algumas delas, que serão usadas ao longo do texto.

Proposição 1.3.3. Se X é um subespaço topológico de $\mathbb{R}^n$, então inclusão $i\colon X \to \mathbb{R}^n$ é contínua.

Demonstração. Se U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, então $i^{-1}(U) = X \cap U$, que é aberto em X pela definição de topologia induzida. $\square$

Proposição 1.3.4. Sejam X, Y, X subespaços topológicos de espaços Euclidianos. Se $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ são aplicações contínuas, a composta $g \circ f\colon X \to Z$ também é contínua.

Demonstração. Se U é aberto em Z, então $g^{-1}(U)$ é aberto em Y e $f^{-1}(g^{-1}(U))$ é aberto em X. Porém,

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U),$$

provando que $g \circ f$ é contínua. □

Proposição 1.3.5. Seja $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua.

(a) Se X é um subespaço de $\mathbb{R}^m$, então a aplicação restrição $f|_X\colon X \to \mathbb{R}^n$ é contínua.

(b) Se V é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ contendo a imagem $f(\mathbb{R}^m)$ de f, então a aplicação restrição de f ao contradomíno V é contínua.

Demonstração. Para o item (a), note que a aplicação $f|_X$ é igual a composta da inclusão $i\colon X \to \mathbb{R}^m$ e a aplicação $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, ambas contínuas. Para o item (b), seja $g\colon \mathbb{R}^m \to V$ a aplicação obtida pela restrição de f ao contradomíno V e considere um aberto B em V. Assim, $B = V \cap W$, para algum aberto W de $\mathbb{R}^n$. Como V contém o conjunto imagem $f(\mathbb{R}^m)$, tem-se

$$f^{-1}(W) = g^{-1}(B).$$

Como $f^{-1}(W)$ é aberto, assim o é o conjunto $g^{-1}(B)$. □

Exemplo 1.3.6. Dados três números positivos a, b e c, considere o elipsoide

$$\mathcal{E} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\} \tag{1.8}$$

como subespaço topológico de $\mathbb{R}^3$. Se $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ denota a projeção $\pi(x, y, z) = (x, y)$, então a restrição $\pi|_{\mathcal{E}}$ é uma aplicação contínua do elipsoide $\mathcal{E}$ sobre o plano $\mathbb{R}^2$.

Uma aplicação $f\colon X \to Y$, entre os subespaços $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$, é dita ser um *homeomorfismo* se f é uma bijeção contínua, cuja inversa $f^{-1}\colon Y \to X$ também é contínua.

Exemplo 1.3.7. A aplicação $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x, y, z) = (ax, by, cz)$$

é contínua como aplicação entre espaços Euclidianos. A restrição de f à esfera

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

é uma aplicação contínua $g\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$. Note que $g(\mathbb{S}^2) = \mathcal{E}$, onde $\mathcal{E}$ é o elipsoide dado em (1.8). Note também que f é injetora e que

$$f^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right).$$

Assim, $g^{-1} = f^{-1}|_{\mathcal{E}}$ é contínua. Portanto, g é um homeomorfismo da esfera $\mathbb{S}^2$ sobre o elipsoide $\mathcal{E}$.

Exemplo 1.3.8. Na esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, fixemos seu polo norte $N = (0, 0, 1)$. No subespaço $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, definiremos uma aplicação $\pi_N : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$ da seguinte forma. Para cada ponto $x \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ dado, $\pi_N(x)$ é o ponto em que a semirreta de $\mathbb{R}^3$, com origem em N e passando por x, intercepta o plano $x_3 = 0$. Os pontos dessa semirreta são da forma

$$N + t(x - N),\ t \geq 0.$$

Este ponto está no plano $x_3 = 0$ se, e somente se, $1 + t(x_3 - 1) = 0$, onde $x = (x_1, x_2, x_3)$. Assim, $t = \frac{1}{1-x_3}$ e, portanto,

$$\pi_N(x) = \frac{1}{1 - x_3}(x_1, x_2, 0). \tag{1.9}$$

A expressão em (2.1) mostra que π_N é contínua, e é chamada a *projeção estereográfica* da esfera $\mathbb{S}^2$. Considere agora a aplicação $\varphi_N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ definida por

$$\varphi_N(x) = \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \frac{2x_2}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1}\right),$$

para todo $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Tem-se que φ_N é contínua, e um cálculo simples mostra que

$$\varphi_N \circ \pi_N = id \quad \text{e} \quad \pi_N \circ \varphi_n = id,$$

ou seja, a projeção estereográfica π_N é um homeomorfismo entre $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ e o plano $\mathbb{R}^2$.

Exercícios

1. Considere uma aplicação contínua $f\colon X \to \mathbb{R}^n$, definida num subespaço $X \subset \mathbb{R}^m$. Prove que o gráfico $Gr(f)$ de f e o domínio X são subespaços homeomorfos.

2. Prove que o cone

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2,\ z \geq 0\}$$

é homeomorfo ao plano $\mathbb{R}^2$.

3. Estabeleça um homeomorfismo entre $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ e o cilindro $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

1.4 Aplicações diferenciáveis

Nesta seção iremos somente apresentar as propriedades básicas das aplicações diferenciáveis entre espaços Euclidianos. Para funções reais de uma variável real, dizemos que uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *derivável* num ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ se existe um número real $f'(x_0)$ tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x} = f'(x_0). \tag{1.10}$$

A relação (1.10) não se aplica para aplicações mais gerais $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, mas podemos reformulá-la a fim de estendermos a tais aplicações.

Para isso, defina uma aplicação linear $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pondo

$$T(v) = f'(x_0) \cdot v,$$

para todo $v \in \mathbb{R}$. Dessa forma, a relação (1.10) pode ser reescrita como

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + x) - f(x_0) - T(x)}{x} = 0.$$

Fixemos agora um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$.

Definição 1.4.1. Uma aplicação $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ é dita ser *diferenciável* num ponto $p \in U$ se existe uma aplicação linear $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(p + v) - f(p) - T(v)}{\|v\|} = 0.$$

Ou seja, f é diferenciável em $p \in U$ se existe uma aplicação linear $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(p + v) - f(p) = T(v) + r(v),$$

onde

$$\lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0. \tag{1.11}$$

Como a condição (1.11) independe das normas escolhidas em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, o fato de uma aplicação ser ou não diferenciável num ponto também não depende das normas.

A *derivada direcional* de uma aplicação $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ num ponto $p \in U$, na direção de um vetor $v \in \mathbb{R}^m$, é definida pondo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t},$$

desde que o limite exista. A derivada direcional pode ser interpretada da seguinte forma. Considere $\epsilon > 0$ tal que o segmento de reta, parametrizado por $\lambda(t) = p + tv$, esteja contido em U, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. O segmento λ é transformado por f na curva $\alpha = f \circ \lambda$ em $\mathbb{R}^n$, cujo vetor velocidade no instante $t = 0$ coincide com a derivada direcional de f em p, na direção de v, pois

$$\begin{aligned}
\alpha'(0) &= (f \circ \lambda)'(0) = \frac{d}{dt} f(\lambda(t))(0) = \frac{d}{dt} f(p + tv)(0) \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} = \frac{\partial f}{\partial v}(p).
\end{aligned}$$

Se $f_1, \ldots, f_n \colon U \to \mathbb{R}$ denotam as funções coordenadas de f, então

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(p), \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial v}(p) \right).$$

No caso particular em que $v = e_i$ é o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^m$ escreveremos, como de costume, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ ao invés de $\frac{\partial f}{\partial e_i}(p)$. Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(p), \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(p) \right).$$

Observação 1.4.2. Se $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $p \in U$ e para instantes t suficientemente pequenos, tem-se

$$f(p + tv) - f(p) = T(tv) + r(tv),$$

com

$$\lim_{t \to 0} \frac{r(tv)}{\|tv\|} = 0.$$

Como T é linear, tem-se $T(tv) = tT(v)$, logo

$$\frac{f(p + tv) - f(p)}{t} = T(v) + \frac{r(tv)}{t}.$$

Isso implica que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} = T(v).$$

Disso decorre, em particular, que a aplicação linear T que melhor aproxima f numa vizinhança do ponto p é única. Ela será chamada a *diferencial* de f em p, e denotada por $df(p)$.

Vejamos alguns exemplos iniciais.

Exemplo 1.4.3. Toda aplicação constante $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, com $f(x) = y_0$, é diferenciável, e $df(p) = 0$, para todo $p \in U$. De fato, isso segue de que $f(p+v) - f(p) = y_0 - y_0 = 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^m$

Exemplo 1.4.4. A aplicação identidade $id\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável e, em todo ponto $p \in U$, a diferencial de id em p é a aplicação linear identidade de $\mathbb{R}^n$. De fato, basta observar que

$$id(p+v) - id(p) = p + v - p = v = id(v) + 0,$$

para quaisquer $p \in U$ e $v \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.4.5. Toda aplicação linear $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável e, para cada $p \in \mathbb{R}^m$, tem-se $dT(p) = T$. De fato,

$$T(p+v) - T(p) = T(v) = T(v) + 0,$$

para todo $v \in \mathbb{R}^m$.

Exemplo 1.4.6. Toda aplicação bilinear $\phi\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é diferenciável e, para cada ponto $(p,q) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, sua diferencial em (p,q) é a aplicação bilinear $d\phi(p,q)\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ dada por

$$d\phi(p,q) \cdot (v,w) = \phi(p,w) + \phi(v,q), \tag{1.12}$$

para todo $(v,w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. De fato, como ϕ é bilinear, tem-se

$$\phi(p+v, q+w) - \phi(p,q) = \phi(p,w) + \phi(v,q) + \phi(v,w).$$

Considere uma constante $c > 0$ tal que

$$\|\phi(v,w)\| \leq c \cdot \|v\| \cdot \|w\|,$$

para quaisquer $v \in \mathbb{R}^m$ e $w \in \mathbb{R}^n$ (cf. Exemplo 1.2.5). Usando a norma da soma, temos que $\|(v,w)\| = \|v\| + \|w\|$. Assim,

$$\frac{\|\phi(v,w)\|}{\|(v,w)\|} \leq \frac{c \cdot \|v\| \cdot \|w\|}{\|v\| + \|w\|} \leq c \cdot \|v\|.$$

Isso implica que

$$\lim_{(v,w)\to(0,0)} \frac{\phi(v,w)}{\|(v,w)\|} = 0.$$

Portanto, a condição de diferenciabilidade é satisfeita, sendo a diferencial dada em (1.12) e o resto sendo $r(v,w) = \phi(v,w)$.

Exemplos importantes de aplicações bilineares são o produto interno $\phi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dado por

$$\phi(v, w) = \langle v, w \rangle,$$

cuja diferencial é dada por

$$d\phi(v, w) \cdot (v, w) = \langle x, w \rangle + \langle y, v \rangle,$$

e a multiplicação de matrizes $\varphi\colon \mathbb{R}^{mp} \times \mathbb{R}^{pn} \to \mathbb{R}^{mn}$ dada por

$$\varphi(X, Y) = X \cdot Y,$$

cuja diferencial é dada por

$$d\varphi(X, Y) \cdot (V, W) = X \cdot W + Y \cdot V.$$

Veremos a seguir algumas propriedades das aplicações diferenciáveis.

Proposição 1.4.7. Uma aplicação $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável num ponto $p \in U$ se, e somente se, cada função coordenada $f_i\colon U \to \mathbb{R}$ é diferenciável em p, com $1 \leq i \leq n$.

Demonstração. Basta observar que a igualdade vetorial

$$f(p + v) - f(p) = df(p) \cdot v + r(v)$$

equivale às n igualdades numéricas

$$f_i(p + v) - f_i(p) = df_i(p) \cdot v + r_i(v),$$

com $r_i(v) = (r_1(v), \ldots, r_n(v))$. Além disso, o limite vetorial

$$\lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$$

corresponde aos n limites numéricos

$$\lim_{v \to 0} \frac{r_i(v)}{\|v\|} = 0,$$

e isso conclui a demonstração. □

Em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, a diferencial $df(p)$ possui uma matriz, chamada a *matriz jacobiana* de f em p, denotada por $Jf(p)$. Suas m colunas são os vetores

$$df(p) \cdot e_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(p), \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(p) \right)$$

Assim,

$$Jf(p) = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{array} \right),$$

onde $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Vejamos um exemplo simples.

Exemplo 1.4.8. Considere a aplicação $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, xy),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Segundo a Proposição 1.4.7, f é diferenciável e sua diferencial num ponto $p = (x, y)$ é dada por

$$df(p) = \left(\begin{array}{cc} 2x & -2y \\ y & x \end{array} \right).$$

Assim, por exemplo, no ponto $p = (1, 1)$ e para o vetor $v = (1, 2)$, temos

$$df(p) \cdot v = df(p) \cdot (1, 2) = (-2, 3).$$

Exemplo 1.4.9. Dados um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, um ponto $p \in U$ e um vetor $v \in \mathbb{R}^n$, sempre é possível encontrar uma curva $\alpha \colon (-\epsilon, \epsilon) \to U$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Basta definir $\alpha(t) = p + tv$, com $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Escrevendo $p = (p_1, \ldots, p_n)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$, as funções coordenadas de α são

$$\alpha_i(t) = p_i + tv_i, \ 1 \leq i \leq n.$$

Assim, α é diferenciável, $\alpha(0) = p$ e

$$\alpha'(0) = (\alpha_1'(0), \ldots, \alpha_n'(0)) = (v_1, \ldots, v_n) = v,$$

como queríamos.

Proposição 1.4.10. Sejam $f \colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $g \colon V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ duas aplicações diferenciáveis, onde os abertos U e V são tais que $f(U) \subset V$. Então, a composta $g \circ f \colon U \to \mathbb{R}^k$ é diferenciável e, em todo ponto $p \in U$, tem-se

$$d(g \circ f)(p) = dg(f(p)) \circ df(p).$$

Demonstração. O fato que a aplicação composta é diferenciável é consequência da regra da cadeia para funções diferenciáveis. Dados um ponto $p \in U$ e um vetor $v \in \mathbb{R}^m$, considere uma curva diferenciável $\alpha\colon (-\epsilon, \epsilon) \to U$, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Seja $w = df(p) \cdot v$ e note que

$$dg(f(p)) \cdot w = \frac{d}{dt}(g \circ f \circ \alpha)(0).$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(g \circ f)(p) \cdot v &= \frac{d}{dt}(g \circ f \circ \alpha)(0) = dg(f(p)) \cdot w \\ &= dg(f(p)) \circ df(p) \cdot v, \end{aligned}$$

como queríamos. □

Considere dois abertos $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$. Um *difeomorfismo* entre U e V é uma bijeção diferenciável $f\colon U \to V$, cuja inversa $f^{-1}\colon V \to U$ também é diferenciável. Acerca de aplicações diferenciáveis que admitem inversas, decorre da regra da cadeia o seguinte

Corolário 1.4.11. Considere uma aplicação $f\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, diferenciável num ponto $p \in U$, que admite uma inversa $g\colon V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, diferenciável no ponto $q = f(p)$. Então, a diferencial $df(p)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo, cujo inverso é $dg(q)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Em particular, $m = n$.

Demonstração. Das igualdades $g \circ f = id|_U$ e $f \circ g = id|_V$, decorre da regra da cadeia que $dg(q) \circ df(p) = id$ em $\mathbb{R}^m$ e $df(p) \circ dg(q) = id$ em $\mathbb{R}^n$. Disso decorre que $dg(q) = df(p)^{-1}$. □

Como consequência do Corolário 1.4.11, se $f\colon U \to V$ é um difeomorfismo entre os abertos $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ então, para todo $p \in U$, a diferencial $df(p)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo. Em particular, $m = n$ e U, V são abertos do mesmo espaço Euclidiano.

Um exemplo de homeomorfismo diferenciável, cujo inverso não é diferenciável, é a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$. De forma mais precisa, f^{-1} não é diferenciável em $x = 0$. Isso mostra que o conceito de difeomorfismo não é o mesmo que homeomorfismo diferenciável.

Exercícios

1. Dado uma aplicação $f\colon \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}^n$, considere a extensão radial de f, que é a aplicação $F\colon \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right), & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Prove que F é diferenciável na origem $0 \in \mathbb{R}^{m+1}$ se, e somente se, f é linear[1].

2. Dados uma função diferenciável $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e um ponto $p \in U$, o *gradiente* de f em p é definido como o vetor $\mathrm{grad} f(p)$ que satisfaz

$$\langle \mathrm{grad} f(p), v\rangle = \frac{\partial f}{\partial v}(p),$$

para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Prove que o gradiente aponta para uma direção para o qual f é crescente.

3. Considere uma função diferenciável $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, onde U é um aberto e conexo de $\mathbb{R}^n$, tal que a diferencial $df(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é o funcional linear nulo em todo ponto $p \in U$. Prove que f é constante em U.

[1] De fato, f é a restrição de uma aplicação linear.

1.5 O teorema da aplicação inversa

Vimos na Seção 1.4 que se $f\colon U \to V$ é um difeomorfismo, onde U e V são abertos de $\mathbb{R}^n$, a diferencial $df(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo linear para cada $p \in U$. Ou seja, a matriz jacobiana $Jf(p)$ tem posto máximo em todos os pontos $p \in U$. O objetivo desta seção é discutir a recíproca deste fato. Consideremos inicialmente o caso em que f é uma função real de uma variável real.

Exemplo 1.5.1. Uma função derivável $f\colon I \to J$, entre os intervalos abertos $I, J \subset \mathbb{R}$, é um difeomorfismo se, e somente se, $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in I$. De fato, se $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in I$, então ou $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, e neste caso f é um homeomorfismo crescente, ou $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, e f é um homeomorfismo decrescente. Em qualquer caso, o fato que $f^{-1}\colon J \to I$ é derivável decorre do teorema da função inversa.

Quando passamos para outras dimensões, a análise é um pouco mais cuidadosa, como veremos a seguir.

Exemplo 1.5.2. Considere a aplicação $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Observe que f é diferenciável, pois cada uma de suas funções coordenadas o é, e sua matriz jacobiana num ponto (x, y) é dada por

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}.$$

Disso decorre, em particular, que $\det(Jf(x, y)) = e^{2x} \neq 0$, qualquer que seja o ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ou seja, em todo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, a diferencial $df(x, y)$ é um isomorfismo linear. No entanto, f não é injetora, pois

$$f(x, y) = f(x, y + 2\pi).$$

Geometricamente, f transforma cada reta vertical $x = x_0$ sobre o círculo centrado na origem de raio e^{x_0}, e transforma cada reta horizontal $y = y_0$ sobre a semirreta que parte da origem e passa pelo ponto $(\cos y_0, \sin y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Uma aplicação diferenciável $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dita ser um *difeomorfismo local* se, para cada ponto $p \in U$, existe um aberto V_p de $\mathbb{R}^n$, com $p \in V_p \subset U$, tal que a restrição $f|_{V_p}$ é um difeomorfismo sobre o aberto $f(V_p)$. Se $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo local, a diferencial $df(p)$ é um isomorfismo linear, para todo $p \in U$. O resultado seguinte, conhecido como o *teorema da aplicação inversa*, estabelece a recíproca deste fato.

Teorema 1.5.3. *Seja* $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *uma aplicação diferenciável e suponha que exista um ponto* $p \in U$ *tal que a diferencial* $df(p)$ *é um isomorfismo linear. Então, existe um aberto* V *de* $\mathbb{R}^n$*, com* $p \in V \subset U$*, tal que* $f|_V\colon V \to f(V)$ *é um difeomorfismo.*

Finalizaremos esta seção com o teorema da função implícita. Lembre da álgebra linear que um funcional linear $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ou é sobrejetor ou é identicamente nulo. Assim, se $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, o mesmo se aplica à diferencial $df(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ em qualquer ponto $p \in U$.

O resultado seguinte, conhecido como o *teorema da função implícita*, nos fornece um meio geométrico de interpretar, localmente, funções diferenciáveis para os quais a diferencial é não-nula.

Teorema 1.5.4. *Seja* $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável e suponha que exista um ponto* $p \in U$ *tal que a diferencial* $df(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *seja sobrejetora. Seja* $f(p) = c$ *e suponha, sem perda de generalidade, que* $\frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \neq 0$*. Se* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \oplus \mathbb{R}$ *é uma decomposição em soma direta, com* $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$*, existem um aberto* $Z = W \times I$*, onde* W *é um aberto de* $\mathbb{R}^{n-1}$ *contendo* x_0 *e* I *é um intervalo aberto contendo* y_0*, e uma função diferenciável* $g\colon W \to \mathbb{R}$ *tais que*

$$f(x, g(x)) = c,$$

para todo $x \in W \subset \mathbb{R}^{n-1}$*.*

Ou seja, o Teorema 1.5.4 nos diz que a interseção $f^{-1}(c) \cap Z$ é o gráfico da função diferenciável $g\colon W \to \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que a função g é definida implicitamente pela equação $f(x, y) = c$, onde $f(p) = c$.

Capítulo 2

Subvariedades Euclidianas

As técnicas do cálculo, que tem suas origens no final do século XVII com Newton e Leibniz, transformaram a Geometria. Os objetos, que até então eram tratados com uma abordagem mais axiomática, ganharam nova perspectiva com o advento do cálculo diferencial e integral.

A geometria diferencial de superfícies no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$, por exemplo, tem dois grandes aspectos. Um deles, que está ligado diretamente às origens do cálculo, diz respeito as propriedades locais das superfícies, ou seja, aquelas propriedades que dependem somente do comportamento da superfície na vizinhança de um ponto. O segundo aspecto diz respeito em como as propriedades locais de uma superfície influenciam no seu comportamento como um todo.

Neste capítulo iremos apenas introduzir e destacar algumas das propriedades locais das subvariedades Euclidianas em $\mathbb{R}^n$, que são generalizações direta das superfícies em $\mathbb{R}^3$ estudadas nos cursos clássicos de geometria diferencial. Esses objetos serão revisitados no capítulo seguinte, no sentido de que são os exemplos naturais de uma classe mais ampla, as variedades diferenciáveis. O objetivo aqui é apenas destacar que, com o auxílio dos teoremas clássicos do cálculo, como os teoremas da aplicação inversa e implícita, as subvariedades Euclidianas admitem descrições e caracterizações simples. Maiores detalhes podem ser encontrados em E. Lima [11], para os resultados do cálculo, e as referências clássicas de geometria diferencial M. do Carmo [3], M. Berger - B. Gostiaux [2] ou J. Lee [10].

2.1 Subvariedades Euclidianas

Nesta seção estudaremos o conceito de subvariedade em $\mathbb{R}^n$. De forma intuitiva, subvariedades em $\mathbb{R}^n$ são subconjuntos localmente homeomorfos a algum espaço Euclidiano que, em cada ponto, está bem definida uma estrutura de espaço tangente.

Definição 2.1.1. Uma *subvariedade Euclidiana* de *dimensão* m em $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto M tal que, para todo ponto $p \in M$, existem um aberto V de $\mathbb{R}^n$, com $p \in V$, e um homeomorfismo $\varphi : U \to M \cap V$, definido num aberto U de $\mathbb{R}^m$, que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) φ é uma aplicação diferenciável,

(b) a diferencial $\mathrm{d}\varphi(x)$ é injetora em todo ponto $x \in U$.

A aplicação φ é chamada uma *parametrização* para a subvariedade Euclidiana M, o subconjunto $M \cap V$ é uma *vizinhança coordenada* de M em torno do ponto p e o número $n - m$ é a *codimensão* da subvariedade M em $\mathbb{R}^n$. No caso particular em que $n - m = 1$, M é usualmente chamada uma *hipersuperfície* de $\mathbb{R}^n$. Além disso, no caso em que $m = 1$, M é simplesmente uma curva diferenciável em $\mathbb{R}^n$.

Na Definição 2.1.1 estamos considerando M com a topologia induzida de $\mathbb{R}^n$. Assim, toda subvariedade Euclidiana é, em particular, uma variedade topológica. Além disso, a condição de $\mathrm{d}\varphi(x)$ ser injetora equivale ao conjunto $\{\mathrm{d}\varphi(x) \cdot e_i : 1 \leq i \leq m\}$ ser linearmente independente ou, de forma equivalente, a matriz Jacobiana $\mathrm{d}\varphi(x)$ ter posto m.

A fim de reduzir a notação e simplificar os enunciados, uma subvariedade Euclidiana M de dimensão m em $\mathbb{R}^n$ será denotada simplesmente por M^m, ficando subentendido que M é sempre subconjunto de algum espaço Euclidiano. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.1.2. Qualquer subespaço vetorial E de dimensão m em $\mathbb{R}^n$ é uma subvariedade Euclidiana de dimensão m em $\mathbb{R}^n$. De fato, considere um isomorfismo linear $T : E \to \mathbb{R}^m$. Munimos E da única topologia, induzida de $\mathbb{R}^n$, que torna T um homeomorfismo. Como toda aplicação linear em $\mathbb{R}^n$ é diferenciável, concluímos que T é um difeomorfismo e, portanto, uma parametrização global para E.

Exemplo 2.1.3. Consideremos a esfera unitária $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$. Se $N = (0, \dots, 0, 1)$ é o polo norte de $\mathbb{S}^n$, seja $\pi_N : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ a projeção estereográfica. Geometricamente, $\pi_N(x)$ é o ponto em que a semirreta de

$\mathbb{R}^{n+1}$, com origem em N e passando pelo ponto $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$, intercepta o hiperplano $x_{n+1} = 0$. Os pontos dessa semirreta são da forma $N + t(x - N)$, com $t \geq 0$. Este ponto está no hiperplano $x_{n+1} = 0$ se, e somente se, $1 + t(x_{n+1} - 1) = 0$, onde $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$. Assim, $t = \frac{1}{1 - x_{n+1}}$ e, portanto,

$$\pi_N(x) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n, 0). \tag{2.1}$$

A expressão em (2.1) mostra que π_N é contínua. Por outro lado, considere a aplicação $\varphi_N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ definida por

$$\varphi_N(x) = \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \ldots, \frac{2x_n}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right),$$

para todo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Tem-se φ_N contínua,

$$\varphi_N \circ \pi_N = id \quad \text{e} \quad \pi_N \circ \varphi_n = id,$$

ou seja, φ_N é um homeomorfismo. Além disso, φ_N é diferenciável, e o leitor pode verificar que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, a diferencial $\mathrm{d}\varphi_N(x)$ é injetora. Concluímos, assim, que a inversa da projeção estereográfica é uma parametrização para a vizinhança coordenada $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$. De forma análoga, podemos considerar a inversa da projeção estereográfica π_S relativa ao polo sul $S = (0, 0, \ldots, -1)$ de $\mathbb{S}^n$ mostrando que $\mathbb{S}^n$ é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Nos dois exemplos a seguir discutiremos as subvariedades Euclidianas de dimensão máxima e mínima.

Exemplo 2.1.4. Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma subvariedade Euclidiana de dimensão 0 se, e somente se, para todo $p \in M$, existem um aberto V de $\mathbb{R}^n$, com $p \in V$, e uma parametrização $\varphi : U \to M \cap V$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^0 = \{0\}$. Assim, devemos ter $U = \{0\}$ e $M \cap V = \{p\}$. Portanto, $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma subvariedade de dimensão 0 se, e somente se, M é um conjunto discreto.

Exemplo 2.1.5. Todo subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma subvariedade Euclidiana de dimensão n em $\mathbb{R}^n$, imagem da única parametrização $id : U \to U$. Reciprocamente, seja M uma subvariedade Euclidiana de dimensão n em $\mathbb{R}^n$. Assim, para todo $p \in M$, existem um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, com $p \in V$, e um homeomorfismo $\varphi : U \to M \cap V$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Pelo teorema da invariância do domínio (cf. Apêndice 2), segue que a vizinhança coordenada $M \cap V$ é aberta em $\mathbb{R}^n$. Portanto, o conjunto M, reunião das vizinhanças coordendas $M \cap V$, é aberto em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.1.6. O gráfico de uma aplicação diferenciável $f : U \to \mathbb{R}^{n-m}$, definida num aberto U de $\mathbb{R}^m$, é uma subvariedade Euclidiana de dimensão m em $\mathbb{R}^n$. De fato, denotando por $\mathrm{Gr}(f)$ o gráfico de f, mostremos que a aplicação $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, dada por $\varphi(x) = (x, f(x))$, é uma parametrização global para $\mathrm{Gr}(f)$. Como f é diferenciável, o mesmo ocorre com φ. Cada ponto $(x, f(x)) \in \mathrm{Gr}(f)$ é imagem através de φ do único ponto $x \in U$, logo φ é injetora. Além disso, a restrição ao gráfico de f da projeção de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^m$ é uma inversa para φ, mostrando que φ^{-1} também é contínua. Disso decorre que φ é um homeomorfismo. Finalmente, como $\mathrm{d}\varphi(x)$ tem posto m em todos os pontos $x \in U$, segue que φ é uma imersão.

O resultado seguinte é uma recíproca local para o Exemplo 2.1.6.

Teorema 2.1.7. *Toda subvariedade Euclidiana de dimensão m em $\mathbb{R}^n$ é, localmente, o gráfico de uma aplicação diferenciável. Mais precisamente, dado um ponto p da subvariedade M, existem abertos $Z \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$, com $p \in V$, e uma aplicação diferenciável $f : Z \to \mathbb{R}^{n-m}$ tais que $M \cap V = \mathrm{Gr}(f)$.*

Demonstração. Fixado um ponto $p \in M$, considere uma parametrização $\varphi : U \to \varphi(U)$ de M, com $p = \varphi(x)$. Como $E = \mathrm{d}\varphi(x)(\mathbb{R}^m)$ é um subespaço vetorial de dimensão m de $\mathbb{R}^n$, existe uma decomposição em soma direta $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$ tal que a projeção $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$ transforma E isomorficamente sobre $\mathbb{R}^m$. Considere a aplicação $\eta = \pi \circ \varphi : U \to \mathbb{R}^m$. Como $\mathrm{d}\eta(x) = \pi \circ \mathrm{d}\varphi(x)$ é um isomorfismo linear, segue do teorema da aplicação inversa que existe um aberto W de $\mathbb{R}^m$, com $x \in W \subset U$, tal que $\eta|_W : W \to \eta(W) = Z$ é um difeomorfismo. Defina

$$\xi = (\eta|_W)^{-1} : Z \to W \quad \text{e} \quad \psi = \varphi \circ \xi.$$

Temos que ψ é uma parametrização de M e $\pi \circ \psi = id$. Disso decorre que a primeira coordenada de $\psi(x)$, em relação à decomposição $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$, é x. Denote por $f(x)$ a segunda coordenada. Assim,

$$\psi(Z) = \varphi(W) = \{(x, f(x)) : x \in Z\}$$

para alguma aplicação diferenciável $f : Z \to \mathbb{R}^{n-m}$. Como φ é aberta, tem-se $\mathrm{Gr}(f) = \varphi(W) = M \cap V$, para algum aberto V de $\mathbb{R}^n$, com $p \in V$. □

Como aplicação do Teorema 2.1.7, vejamos um exemplo simples de conjunto que não é subvariedade Euclidiana.

Exemplo 2.1.8. Denotemos por M o cone de uma folha em $\mathbb{R}^3$, i.e.,

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0\}.$$

Observe inicialmente que a projeção $\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\pi(x, y, z) = (x, y)$, define um homeomorfismo entre M e $\mathbb{R}^2$. No entanto, M não é uma superfície em $\mathbb{R}^3$. De fato, caso fosse existiriam, em virtude do Teorema 2.1.7, abertos $U \subset \mathbb{R}^2$ e $V \subset \mathbb{R}^3$, com $0 \in V$, e uma função diferenciável $g : U \to \mathbb{R}$ tal que $M \cap V = \mathrm{Gr}(g)$. Observe que $M \cap V$ não pode ser um gráfico em relação a uma decomposição da forma $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}$, no qual o segundo fator seja o eixo-x ou o eixo-y. Resta então para o segundo fator da decomposição acima ser o eixo-z e, assim, $g = f|_U$, onde $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. No entanto, f não é diferenciável em $(0, 0)$.

2.2 Valores regulares

De modo geral, provar que um determinado conjunto M é uma subvariedade Euclidiana de $\mathbb{R}^n$ não é uma tarefa simples. De acordo com a Definição 2.1.1, devemos exibir parametrizações de vizinhanças de todos os pontos de M. Veremos nesta seção que, com a noção de valor regular para aplicações diferenciáveis, podemos obter outras maneiras de gerar subvariedades Euclidianas.

Seja $f : V \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável, definida no aberto V de $\mathbb{R}^m$. Um ponto $p \in V$ é chamado *ponto regular* para f se a diferencial $\mathrm{d}f(p)$ é uma aplicação linear sobrejetora. Um ponto $q \in \mathbb{R}^n$ é chamado *valor regular* para f se a pré-imagem $f^{-1}(q)$ contém apenas pontos regulares para f. Finalmente, um ponto $p \in V$ para o qual a diferencial $\mathrm{d}f(p)$ não é sobrejetora será chamado *ponto crítico* para f.

A proposição seguinte fornece condições suficientes para que uma subvariedade Euclidiana seja dada de forma implícita.

Proposição 2.2.1. Seja $f : V \to \mathbb{R}^{n-m}$ uma aplicação diferenciável, onde V é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Se $q \in \mathbb{R}^{n-m}$ é valor regular para f, com $f^{-1}(q) \neq \emptyset$, então $M = f^{-1}(q)$ é uma subvariedade Euclidiana de dimensão m em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Em virtude do Exemplo 2.1.6, é suficiente mostrar que, localmente, M é gráfico de uma aplicação diferenciável. Dado um ponto $p \in M$, com $p = (x_0, y_0)$, podemos assumir que $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$, visto que $\mathrm{d}f(p)$ é sobrejetora. Assim, pelo teorema da aplicação implícita, existem um aberto $Z = U \times W$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^m$ contendo x_0 e W é um aberto de $\mathbb{R}^{n-m}$ contendo y_0, e uma aplicação diferenciável $g : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ tais que $f(x, g(x)) = q$, para todo $x \in U$. Isso mostra que $M \cap Z = \mathrm{Gr}(g)$. $\square$

No caso em que $f^{-1}(q) = \emptyset$, então q é trivialmente um valor regular para f. Além disso, quando o contra-domínio de f é $\mathbb{R}$, então o funcional linear $\mathrm{d}f(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ou é nulo ou é sobrejetora. Neste caso, um número real c é valor regular para f se, e somente se, $\mathrm{d}f(p) \neq 0$, para todo $p \in f^{-1}(c)$.

Vejamos algumas aplicações da Proposição 2.2.1.

Exemplo 2.2.2. Considere a função diferenciável $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \langle x, x\rangle$, para todo $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Observe que a esfera unitária $\mathbb{S}^n$ pode ser dada como $\mathbb{S}^n = f^{-1}(1)$. A fim de verificar novamente que $\mathbb{S}^n$ é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$, basta mostrar que 1 é valor regular para f. De fato, para todo ponto $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ e todo vetor $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, tem-se $\mathrm{d}f(x) \cdot v = 2\langle x, v\rangle$. Isso implica que $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ é o único ponto crítico de f. Como $f(0) = 0 \neq 1$, segue a conclusão.

Lembremos que uma matriz quadrada $X \in M(n)$ é chamada *simétrica* se $X^t = X$ e *anti-simétrica* se $X^t = -X$, onde X^t denota a transposta de X. As matrizes simétricas e anti-simétricas formam subespaços vetoriais de $M(n)$, denotados por $\mathcal{S}(n)$ e $\mathcal{A}(n)$, respectivamente, tal que $M(n) = \mathcal{S}(n) \oplus \mathcal{A}(n)$.

Exemplo 2.2.3. O *grupo ortogonal* $O(n)$, definido por

$$O(n) = \{X \in M(n) : XX^t = I\},$$

é uma subvariedade Euclidiana de dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$ em $\mathbb{R}^{n^2}$. De fato, considerando a aplicação $f : M(n) \to \mathcal{S}(n)$ dada por $f(X) = XX^t$, temos que $O(n) = f^{-1}(I)$, onde I denota a matriz identidade. Assim, devemos provar que $I \in \mathcal{S}(n)$ é valor regular para f. A aplicação f é diferenciável e sua diferencial é dada por

$$\mathrm{d}f(X) \cdot H = XH^t + HX^t.$$

Finalmente, dados $X \in O(n)$ e $S \in \mathcal{S}(n)$, tome $V = \frac{1}{2}SX$. Um cálculo simples mostra que $\mathrm{d}f(X) \cdot V = S$, ou seja, $\mathrm{d}f(X)$ é sobrejetora, logo $O(n)$ é uma subvariedade Euclidiana de dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$ em $M(n) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$.

Exemplo 2.2.4. O toro T^2 em $\mathbb{R}^3$ é o subconjunto gerado pela rotação de um círculo de raio r em torno de uma reta contida no plano do círculo e a uma distância $a > r$ do centro do círculo. Por simplicidade, denotemos por $\mathbb{S}^1$ o círculo contido no plano-yz com centro no ponto $(0, a, 0)$. Assim, $\mathbb{S}^1$ é dado pela equação $(y - a)^2 + z^2 = r^2$, e os pontos do toro T^2, obtidos pela rotação de $\mathbb{S}^1$ em torno do eixo-z satisfazem a equação

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2.$$

Dessa forma, T^2 pode ser dado como $T^2 = f^{-1}(r^2)$, onde

$$f(x, y, z) = z^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2.$$

Note que, para $(x, y) \neq (0, 0)$, f é diferenciável e tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z.$$

Além disso,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = a \quad \text{e} \quad z = 0.$$

Disso decorre, em particular, que r^2 é valor regular para f, pois nenhum dos pontos acima pertence a T^2, mostrando que T^2 é uma superfície em $\mathbb{R}^3$.

Observação 2.2.5. A imagem inversa $f^{-1}(q)$ pode ser uma subvariedade Euclidiana sem que q seja valor regular para f. Por exemplo, considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = z^2$. Note que f é diferenciável e $f^{-1}(0)$ coincide com o plano-xy, que é uma superfície em $\mathbb{R}^3$. No entanto, o ponto $0 \in \mathbb{R}$ não é valor regular para f, pois $\mathrm{d}f(x, y, 0) = 0$, para todo $(x, y, 0) \in f^{-1}(0)$.

O resultado seguinte é uma recíproca local para a Proposição 2.2.1.

Teorema 2.2.6. *Toda subvariedade Euclidiana de dimensão m em $\mathbb{R}^n$ é, localmente, imagem inversa de valor regular. Ou seja, dado um ponto p da subvariedade M, existem um aberto V de $\mathbb{R}^n$, com $p \in V$, e uma aplicação diferenciável $f : V \to \mathbb{R}^{n-m}$ tais que $M \cap V = f^{-1}(0)$, onde $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$ é valor regular para f.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.1.7, existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, com $p \in V$, tal que $M \cap V = \mathrm{Gr}(g)$, onde $g : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ é uma aplicação diferenciável definida num aberto U de $\mathbb{R}^m$. Defina a aplicação $f : V \to \mathbb{R}^{n-m}$ pondo $f(x, y) = y - g(x)$. Por construção, temos $M \cap V = \mathrm{Gr}(g) = f^{-1}(0)$. Resta provar que $\mathrm{d}f(x, y)$ é sobrejetora em todo ponto $(x, y) \in f^{-1}(0)$. De fato, dados $(x, y) \in f^{-1}(0)$ e $(u, v) \in \mathbb{R}^n$, temos:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(x, y) \cdot (u, v) &= \mathrm{d}f(x, y) \cdot (u, 0) + \mathrm{d}f(x, y) \cdot (0, v) \\ &= \mathrm{Id}(0) - \mathrm{d}g(x) \cdot u + \mathrm{Id}(v) - \mathrm{d}g(x) \cdot 0 \\ &= v - \mathrm{d}g(x) \cdot u. \end{aligned}$$

Portanto, dado $v \in \mathbb{R}^{n-m}$, tem-se $\mathrm{d}f(x, y) \cdot (0, v) = v$, e isso prova que 0 é valor regular para f. $\square$

Os Teoremas 2.1.7 e 2.2.6 fornecem descrições locais para uma dada subvariedade Euclidiana, como gráfico e pré-imagem de valor regular de aplicação diferenciável, respectivamente. O teorema seguinte fornece uma forma equivalente para a Definição 2.1.1, e que será útil nas seções seguintes.

Teorema 2.2.7. *Um subconjunto M de $\mathbb{R}^n$ é uma subvariedade Euclidiana de dimensão m em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, para todo $p \in M$, existem um aberto V de $\mathbb{R}^n$, com $p \in V$, e um difeomorfismo $\xi : V \to \xi(V)$ tal que $\xi(M \cap V) = \xi(V) \cap \mathbb{R}^m$.*

Demonstração. Suponha que M seja uma subvariedade Euclidiana de dimensão m em $\mathbb{R}^n$. Dado um ponto $p \in M$, segue do Teorema 2.2.6 que existe uma aplicação diferenciável $f : Z \to \mathbb{R}^{n-m}$, definida num aberto $Z \subset \mathbb{R}^n$ contendo p, tal que $M \cap V = f^{-1}(0)$, onde $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$ é valor regular para f. Como a diferencial $\mathrm{d}f(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ é sobrejetora, o conjunto $\{\mathrm{d}f(p)\cdot e_1, \ldots, \mathrm{d}f(p)\cdot e_n\}$ gera $\mathbb{R}^{n-m}$. Assim, podemos escolher vetores $e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-m}}$ tais que o conjunto $\{\mathrm{d}f(p)\cdot e_{i_1}, \ldots, \mathrm{d}f(p)\cdot e_{i_{n-m}}\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^{n-m}$. Considere a decomposição em soma direta $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$ tal que $\mathbb{R}^{n-m} = \mathrm{span}\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-m}}\}$ e $\mathbb{R}^m$ gerado pelos demais vetores canônicos. Assim, $\mathrm{d}f(p)|_{\mathbb{R}^{n-m}}$ é um isomorfismo linear. Defina uma aplicação $\xi : Z \to \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$ pondo $\xi(x, y) = (x, f(x, y))$, para todo $(x, y) \in Z$. Temos que ξ é uma aplicação diferenciável e $\mathrm{d}\xi(p)$ é um isomorfismo. Assim, pelo teorema da aplicação inversa, existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, com $p \in V \subset Z$, tal que $\xi|_V : V \to \xi(V)$ é um difeomorfismo. Podemos supor que $\xi(V) = U \times W \subset \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$, onde W é um aberto contendo $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
(x, y) \in M \cap V \quad &\Leftrightarrow \quad \xi(x, y) = (x, f(x, y)) \\
&\Leftrightarrow \quad \xi(x, y) = (x, 0),
\end{aligned}
$$

ou seja, $\xi(M \cap V) = \xi(V) \cap \mathbb{R}^m$. Reciprocamente, dado um ponto $p \in M$, considere o difeomorfismo $\xi : V \to \xi(V)$ tal que $\xi(M \cap V) = \xi(V) \cap \mathbb{R}^m$. Como $\xi(V)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, o subconjunto $U = \xi(V) \cap \mathbb{R}^m$ é aberto em $\mathbb{R}^m$. Defina, então, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ pondo $\varphi = \xi|_U^{-1}$. Assim, φ é uma parametrização de M, com $\varphi(U) = M \cap V$. □

2.3 O espaço tangente

Nesta seção discutiremos a noção de espaço tangente a uma subvariedade Euclidiana. Veremos que este conjunto admite uma estrutura natural de espaço vetorial, induzida do espaço Euclidiano através das parametrizações.

Seja M^m uma subvariedade Euclidiana em $\mathbb{R}^n$. Fixado um ponto $p \in M$, dizemos que um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é *tangente* a M no ponto p se existe uma curva $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, diferenciável em $t = 0$, tal que $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = v$. O conjunto de todos os vetores tangentes a M no ponto p será chamado o *espaço tangente* a M em p e será denotado por T_pM.

Exemplo 2.3.1. Se U é um subconjunto aberto de uma subvariedade Euclidiana M, então $T_pU = T_pM$, para todo $p \in U$. De fato, claramente tem-se $T_pU \subset T_pM$. Se $v \in T_pM$, existe uma curva $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, diferenciável em $t = 0$, com $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = v$. Podemos restringir o intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ de modo que $\lambda(-\epsilon, \epsilon) \subset U$, logo $v \in T_pU$. Em particular, se V é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, então $T_pV = T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$.

O objetivo agora é mostrar que T_pM é um espaço vetorial. Vejamos, inicialmente, como se comportam os espaços tangentes de duas subvariedades Euclidianas relacionadas por uma aplicação diferenciável.

Proposição 2.3.2. Seja $f : U \to V$ uma aplicação diferenciável entre os abertos $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$, e suponha que existam subvariedades Euclidianas M e N tais que $M \subset U$, $N \subset V$ e $f(M) \subset N$. Então, $\mathrm{d}f(p)(T_pM) \subset T_{f(p)}N$, para todo $p \in M$. Em particular, se f é um difeomorfismo, com $f(M) = N$, então $\mathrm{d}f(p)(T_pM) = T_{f(p)}N$, para todo $p \in M$.

Demonstração. Dados um ponto $p \in M$ e um vetor $v \in T_pM$, considere uma curva $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, diferenciável em $t = 0$, com $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = v$. A curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to N$, dada por $\alpha(t) = f(\lambda(t))$, é diferenciável em $t = 0$. Além disso, temos $\alpha(0) = f(p)$ e $\alpha'(0) = \mathrm{d}f(p)\cdot v$, ou seja, $\mathrm{d}f(p)\cdot v \in T_{f(p)}N$. Logo, $\mathrm{d}f(p)(T_pM) \subset T_{f(p)}N$. A última afirmação segue-se aplicando f^{-1} à parte já provada. $\square$

Corolário 2.3.3. O espaço tangente T_pM é um subespaço vetorial de dimensão m em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Em virtude do Teorema 2.2.7, existem um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, com $p \in V$, e um difeomorfismo $\xi : V \to \xi(V)$ tais que $\xi(M \cap V) = \xi(V) \cap \mathbb{R}^m$. Então, pela Proposição 2.3.2, temos:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\xi(p)(T_pM) &= \mathrm{d}\xi(p)(T_p(M \cap V)) = T_{\xi(p)}(\xi(V) \cap \mathbb{R}^m) \\ &= T_{\xi(p)}\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m, \end{aligned}$$

ou seja, $T_pM = \mathrm{d}\xi(p)^{-1}(\mathbb{R}^m)$ é um subespaço vetorial de dimensão m. $\square$

Corolário 2.3.4. Dado um ponto $p \in M$, considere uma parametrização $\varphi : U \to \varphi(U)$ de M, com $p = \varphi(x)$. Então, $T_pM = \mathrm{d}\varphi(x)(\mathbb{R}^m)$. Em particular, uma base para T_pM é dada por $\{\mathrm{d}\varphi(x) \cdot e_i : 1 \leq i \leq m\}$, onde $\{e_1, \ldots, e_m\}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^m$.

Demonstração. Pela Proposição 2.3.2, temos:

$$\mathrm{d}\varphi(x)(\mathbb{R}^m) = \mathrm{d}\varphi(x)(T_xU) \subset T_p\varphi(U) = T_pM.$$

Assim, em virtude do Corolário 2.3.3, segue que $T_pM = \mathrm{d}\varphi(x)(\mathbb{R}^m)$, uma vez que ambos são subespaços vetoriais de dimensão m em $\mathbb{R}^n$. $\square$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.3.5. Sejam $f : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ uma aplicação diferenciável, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, e $q \in \mathbb{R}^{n-m}$ um valor regular para f. Então, o espaço tangente a $M = f^{-1}(q)$ num ponto p é dado por $T_pM = \ker \mathrm{d}f(p)$. De fato, dado um vetor $v \in T_pM$, considere uma curva $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, diferenciável em $t = 0$, tal que $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = v$. A curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^{n-m}$, dada por $\alpha(t) = f(\lambda(t))$, é constante e igual a q, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Assim,

$$\mathrm{d}f(p) \cdot v = \mathrm{d}f(\lambda(0)) \cdot \lambda'(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \lambda)(0) = \alpha'(0) = 0,$$

ou seja, $v \in \ker \mathrm{d}f(p)$. Isso mostra que $T_pM \subset \ker \mathrm{d}f(p)$. Como ambos são subespaços vetoriais de dimensão m em $\mathbb{R}^n$, obtemos a igualdade desejada.

Exemplo 2.3.6. Uma situação particular do Exemplo 2.3.5 pode ser vista no grupo ortogonal $O(n)$. Lembre que $O(n)$ pode ser considerado como a imagem inversa $O(n) = f^{-1}(I)$ da aplicação diferenciável $f : M(n) \to \mathcal{S}(n)$ dada por $f(X) = XX^t$ (cf. Exemplo 2.2.3). Como a diferencial de f é dada por $\mathrm{d}f(X) \cdot H = XH^t + HX^t$, segue do Exemplo 2.3.5 que

$$T_IO(n) = \ker \mathrm{d}f(I) = \{H \in M(n) : H^t + H = 0\},$$

ou seja, o espaço tangente ao grupo ortogonal $O(n)$ na matriz identidade é o subespaço das matrizes anti-simétricas.

O exemplo seguinte generaliza o fato de que a reta tangente ao círculo é sempre ortogonal à direção radial.

Exemplo 2.3.7. O espaço tangente à esfera unitária $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ num ponto p é dado por

$$T_p\mathbb{S}^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle v, p \rangle = 0\}.$$

De fato, observe inicialmente que $\{p\}^\perp = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle v, p\rangle = 0\}$ é um subespaço vetorial de dimensão n em $\mathbb{R}^{n+1}$. Além disso, considere um vetor $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, com $v = \lambda'(0)$, onde $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{S}^n$ é uma curva diferenciável em $t = 0$, com $\lambda(0) = p$. Derivando a igualdade $\|\lambda(t)\| = 1$ e aplicando em $t = 0$, obtemos $\langle v, p\rangle = 0$, ou seja, $v \in \{p\}^\perp$. Isso mostra que $T_p\mathbb{S}^n \subset \{p\}^\perp$. Como $T_p\mathbb{S}^n$ também tem dimensão n, segue que $T_p\mathbb{S}^n = \{p\}^\perp$, e a afirmação está provada.

2.4 Mudança de coordenadas

Dado uma subvariedade Euclidiana M^m em $\mathbb{R}^n$, considere uma parametrização $\varphi : U \to M \cap V$ de M, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se W é um aberto de $\mathbb{R}^m$ e $\xi : W \to U$ é um difeomorfismo, então a aplicação

$$\varphi \circ \xi : W \to M \cap V$$

também é uma parametrização de M, denominada usualmente uma *mudança de coordenadas*. O resultado seguinte garante que esta é a única maneira de obter novas parametrizações do aberto $M \cap V$.

Dados duas parametrizações $\varphi_1 : U_1 \to M \cap V_1$ e $\varphi_2 : U_2 \to M \cap V_2$ em M, com $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, a aplicação

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(M \cap V_1 \cap V_2) \to \varphi_2^{-1}(M \cap V_1 \cap V_2) \tag{2.2}$$

é chamada a *mudança de coordenadas* entre φ_1 e φ_2. Claramente a aplicação em (2.2) é um homeomorfismo entre abertos de $\mathbb{R}^m$. No entanto, não é imediato que $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ é diferenciável, visto que φ_2^{-1} não está definida num aberto de $\mathbb{R}^n$.

O resultado seguinte fornece a diferenciabilidade da aplicação em (2.2).

Teorema 2.4.1. *Sejam $\varphi_1 : U_1 \to M \cap V_1$ e $\varphi_2 : U_2 \to M \cap V_2$ parametrizações de uma subvariedade Euclidiana M, com $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Então, a mudança de coordenadas $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$, dada em* (2.2)*, é um difeomorfismo.*

Demonstração. Fixemos um ponto $p \in M \cap V_1 \cap V_2$. Decorre do Teorema 2.2.7 que existe um difeomorfismo $\xi : V \to \xi(V)$ tal que $\xi(M \cap V) = \xi(V) \cap \mathbb{R}^m$. Como V é aberto em $\mathbb{R}^n$ e φ_1 é um homeomorfismo, existe um aberto $\widetilde{U}_1$ de $\mathbb{R}^m$, com $\varphi_1^{-1}(p) \in \widetilde{U}_1 \subset U_1$, tal que $\varphi_1(\widetilde{U}_1) \subset M \cap V$, logo $(\xi \circ \varphi_1)(\widetilde{U}_1) \subset \mathbb{R}^m$. Analogamente, existe um aberto $\widetilde{U}_2$ de $\mathbb{R}^m$, com $\varphi_2^{-1}(p) \in \widetilde{U}_2 \subset U_2$, tal que

$(\xi \circ \varphi_2)(\widetilde{U}_2) \subset \mathbb{R}^m$. Seja $W = \varphi_1(\widetilde{U}_1) \cap \varphi_2(\widetilde{U}_2)$. Assim, no aberto $\varphi_1^{-1}(W)$, tem-se:

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = \varphi_2^{-1} \circ \xi^{-1} \circ \xi \circ \varphi_1 = (\xi \circ \varphi_2)^{-1} \circ (\xi \circ \varphi_1).$$

A composta $\xi \circ \varphi_1$ é diferenciável. Além disso, como $\mathrm{d}(\xi \circ \varphi_2)(x)$ é um isomorfismo linear, segue do teorema da aplicação inversa que $\xi \circ \varphi_2$ é, possivelmente num aberto menor, um difeomorfismo. Disso decorre que $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ é diferenciável. Analogamente se prova que $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$, inversa de $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$, também é diferenciável. □

O Teorema 2.4.1 permite estender o conceito de diferenciabilidade, que até então só faz sentido quando o domínio da aplicação é um subconjunto aberto de algum espaço Euclidiano. O que faremos então é abranger aplicações entre duas subvariedades Euclidianas M^m e N^n.

Definição 2.4.2. Uma aplicação $f : M \to N$ é dita *diferenciável* no ponto $p \in M$ se existem parametrizações $\varphi : U \to \varphi(U)$ de M e $\psi : V \to \psi(V)$ de N, com $p = \varphi(x)$ e $f(\varphi(U)) \subset \psi(V)$, de modo que a aplicação

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U \to V \tag{2.3}$$

seja diferenciável no ponto $x \in U \subset \mathbb{R}^m$.

Em virtude do Teorema 2.4.1, a aplicação (2.3) está bem definida e será chamada a *representação* de f em relação às parametrizações φ e ψ.

Observação 2.4.3. No caso particular em que f é da forma $f : M^m \to \mathbb{R}^k$, segue que f é diferenciável no ponto $p \in M$ se existe uma parametrização $\varphi : U \to \varphi(U)$ de M, com $p = \varphi(x)$, tal que a aplicação

$$f \circ \varphi : U \to \mathbb{R}^k$$

é diferenciável no ponto $x = \varphi^{-1}(p)$.

Exemplo 2.4.4. Sejam M^m uma subvariedade Euclidiana em $\mathbb{R}^n$, V um aberto de $\mathbb{R}^n$, com $M \subset V$, e $f : V \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. A restrição de f a M é uma função diferenciável em M. De fato, dados um ponto $p \in M$ e uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \to \varphi(U)$, com $p \in \varphi(U)$, a função $f \circ \varphi : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável, pois é a composta de aplicações diferenciáveis em espaços Euclidianos. Como caso particular, considere a função *distância* $d : M \to \mathbb{R}$ da subvariedade M a um ponto fixado $p_0 \notin M$, ou seja, $d(p) = \|p - p_0\|$, para todo $p \in M$. Neste caso, d é uma função diferenciável pois é a restrição a M da função diferenciável $d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $d(p) = \|p - p_0\|$.

Proposição 2.4.5. Toda parametrização $\varphi : U \to \varphi(U)$ de uma subvariedade Euclidiana M^m é um difeomorfismo.

Demonstração. Da Definição 2.1.1, a aplicação $\varphi : U \to \varphi(U)$ é um homeomorfismo diferenciável. Resta mostrar que a inversa $\varphi^{-1} : \varphi(U) \to U$ é diferenciável. Escrevamos $f = \varphi^{-1}$. Note que a aplicação $f : \varphi(U) \to \mathbb{R}^m$ está definida num aberto da subvariedade M. Assim, segundo a Observação 2.4.3, devemos mostrar que, para todo $p \in \varphi(U)$, existe uma parametrização $\psi : W \to \psi(W)$ de $\varphi(U)$, com $\psi(x) = p$, tal que $f \circ \psi : W \to \mathbb{R}^m$ seja diferenciável. Basta considerar a própria parametrização $\varphi : U \to \varphi(U)$, pois $f \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ \varphi = id$ é a aplicação identidade em $\mathbb{R}^m$, que é diferenciável. $\square$

Dado uma aplicação $f : M^m \to N^n$, diferenciável no ponto $p \in M$, a *diferencial* de f no ponto p é a transformação linear $\mathrm{d}f(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ definida do seguinte modo. Considere uma parametrização $\varphi : U \to \varphi(U)$ de M, com $p = \varphi(x)$. Dado um vetor $v \in T_pM$, temos $v = \mathrm{d}\varphi(x) \cdot w$, para algum vetor $w \in \mathbb{R}^m$. Definimos, então,

$$\mathrm{d}f(p) \cdot v = \mathrm{d}(f \circ \varphi)(x) \cdot w.$$

Devemos mostrar que $\mathrm{d}f(p)$ independe da escolha da parametrização φ. De fato, seja $\psi : V \to \psi(V)$ outra parametrização de M, com $p = \psi(y)$ e $v = \mathrm{d}\psi(y) \cdot u$. Sabemos, pelo Teorema 2.4.1, que $\psi = \varphi \circ \xi$, onde

$$\xi : \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V)) \to \psi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V))$$

é um difeomorfismo entre abertos de $\mathbb{R}^m$, com $\xi(y) = x$. Temos:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\varphi(x) \cdot w &= v = \mathrm{d}\psi(y) \cdot u = \mathrm{d}(\varphi \circ \xi)(y) \cdot u \\ &= \mathrm{d}\varphi(x) \cdot \mathrm{d}\xi(y) \cdot u. \end{aligned}$$

Como $\mathrm{d}\varphi(x)$ é injetora, segue que $\mathrm{d}\xi(y) \cdot u = w$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(f \circ \psi)(y) \cdot u &= \mathrm{d}(f \circ \varphi \circ \xi)(y) \cdot u = \mathrm{d}(f \circ \varphi)(x) \cdot \mathrm{d}\xi(y) \cdot u \\ &= \mathrm{d}(f \circ \varphi)(x) \cdot w. \end{aligned}$$

Observação 2.4.6. O vetor $v \in T_pM$ é o vetor velocidade $\lambda'(0)$ de uma curva $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, diferenciável em $t = 0$, com $\lambda(0) = p$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(p) \cdot v &= \mathrm{d}(f \circ \varphi)(x) \cdot w = \mathrm{d}(f \circ \varphi)(x) \cdot (\varphi^{-1} \circ \lambda)'(0) \\ &= (f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \lambda)'(0) = (f \circ \lambda)'(0), \end{aligned}$$

ou seja, $\mathrm{d}f(p) \cdot v$ é o vetor velocidade da curva $f \circ \lambda$ no instante $t = 0$.

Proposição 2.4.7 (Regra da cadeia)**.** Considere subvariedades Euclidianas M, N, P e aplicações $f : M \to N$ e $g : N \to P$ tais que f é diferenciável no ponto $p \in M$ e g é diferenciável no ponto $f(p)$. Então a aplicação composta $g \circ f : M \to P$ é diferenciável no ponto p e vale a regra:

$$\mathrm{d}(g \circ f)(p) = \mathrm{d}g(f(p)) \circ \mathrm{d}f(p).$$

Demonstração. Considere parametrizações $\varphi : U \to \varphi(U)$, $\psi : V \to \psi(V)$ e $\xi : W \to \xi(W)$ de de M, N e P, respectivamente, tais que $p = \varphi(x)$ e $f(p) = \psi(y)$. Como f é diferenciável em $p \in M$, segue que $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ é diferenciável em x, e como g é diferenciável em $f(p)$, $\xi^{-1} \circ g \circ \psi$ é diferenciável em y. Assim,

$$\xi^{-1} \circ (g \circ f) \circ \varphi = (\xi^{-1} \circ g \circ \psi) \circ (\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)$$

é diferenciável no ponto x, como composta de aplicações diferenciáveis entre abertos Euclidianos logo, por definição, $g \circ f$ é diferenciável em p. Para a segunda parte, temos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}g(f(p)) \circ \mathrm{d}f(p) &= \mathrm{d}(g \circ \psi)(y) \circ \mathrm{d}(f \circ \varphi)(x) \\
&= \mathrm{d}(g \circ \psi)(\psi^{-1}(f(p))) \circ \mathrm{d}(f \circ \varphi)(x) \\
&= \mathrm{d}(g \circ f \circ \varphi)(x) \\
&= \mathrm{d}(g \circ f)(p),
\end{aligned}$$

como queríamos. $\square$

2.5 Exercícios

2.1

1. Considere duas subvariedades Euclidianas $M_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ e $M_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ de dimensões m_1 e m_2, respectivamente. Prove que o produto cartesiano $M_1 \times M_2$ também é uma subvariedade Euclidiana de dimensão $m_1 + m_2$ de $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$. Conclua, em particular, que o *toro* $T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ é uma superfície de $\mathbb{R}^4$.

2. Prove que o cilindro circular reto

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}$$

é uma superfície em $\mathbb{R}^3$.

3. Prove que o helicoide

$$\mathcal{H} = \{(x \cos y, x \sin y, y) : x, y, \in \mathbb{R}\}$$

é uma superfície em $\mathbb{R}^3$.

2.2

1. Considere o *grupo linear especial*

$$\mathrm{SL}(n) = \{X \in \mathrm{GL}(n) : \det X = 1\},$$

onde $\mathrm{GL}(n)$ denota o *grupo linear*, i.e., o subconjunto aberto de $M(n)$ formado por todas as matrizes inversíveis. Usando a função determinante, prove que $\mathrm{SL}(n)$ é uma hipersuperfície de $M(n)$.

2.3

1. Mostre que o espaço tangente a $\mathrm{SL}(n)$, na matriz identidade, é o subespaço das matrizes de traço nulo.

2. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Mostre que o espaço tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ é o gráfico da diferencial $\mathrm{d}f(p) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

2.4

1. Prove que toda aplicação diferenciável $f : M \to N$, entre as subvariedades Euclidianas M e N, é contínua.

2. Se U é um aberto de uma subvariedade Euclidiana M^m, prove que a aplicação inclusão $i : U \to M$ é diferenciável.

3. Se $f : M \to N$ é uma aplicação diferenciável, prove que a restrição de f a qualquer aberto U de M também é diferenciável.

4. Considere o produto cartesiano $M = M_1 \times M_2$ das subvariedades Euclidianas M_1 e M_2.

(a) Prove que as projeções $\pi_i : M \to M_i$ são aplicações diferenciáveis.

(b) Se N é outra subvariedade Euclidiana, prove que uma aplicação $f : N \to M$ é diferenciável se, e somente se, as aplicações coordenadas $\pi_i \circ f$ são diferenciáveis, $i = 1, 2$.

5. Prove que o gráfico de uma aplicação diferenciável $f : M \to N$ é difeomorfo à subvariedade M.

6. Prove que o espaço tangente ao gráfico de uma aplicação diferenciável $f : M \to N$ em um ponto $(p, f(p))$ coincide com o gráfico da diferencial $\mathrm{d}f(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$.

7. Sejam M, N subvariedades Euclidianas em $\mathbb{R}^n$, V um aberto de $\mathbb{R}^n$, com $M \subset V$, e $f : V \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável tal que $f(M) \subset N$. Prove que a restrição $f|_M : M \to N$ é uma aplicação diferenciável. Conclua, em particular, que a aplicação *antipodal* $A : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, dada por

$$A(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (-x_1, \ldots, -x_{n+1}),$$

é um difeomorfismo, onde $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ denota a esfera unitária.

2.6 Apêndice 2: O teorema da invariância do domínio

Um problema básico da topologia dos espaços Euclidianos é determinar se dois subconjuntos $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ são ou não homeomorfos. Não existe uma resposta geral para este problema. A fim de garantir que X e Y são homeomorfos é necessário exibir um homeomorfismo entre eles. Quando se suspeita que X e Y não são homeomorfos, a ideia é estudar invariantes topológicos, como a compacidade, a conexidade e o grupo fundamental.

Exemplo 2.6.1. Considere o intervalo fechado $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e a bola fechada $Y = B[p; r] \subset \mathbb{R}^2$. Ambos são compactos e conexos. No entanto, seja qual for o ponto $q \in Y$, o conjunto $Y \setminus \{q\}$ ainda é conexo enquanto que, para qualquer ponto $a < x < b$, o conjunto $X \setminus \{x\}$ é desconexo. Assim, se existisse um homeomorfismo $f : X \to Y$, escolheríamos um ponto $x \in (a, b)$, escreveríamos $q = f(x)$ e teríamos, por restrição, um homeomorfismo $g : X \setminus \{x\} \to Y \setminus \{q\}$, $g = f|_{X\setminus\{x\}}$, entre um conjunto conexo e um conjunto desconexo, o que é uma contradição.

Se tentarmos repetir esse raciocínio para provar que uma bola fechada $X = B[p; \delta] \subset \mathbb{R}^2$ não é homeomorfa a uma bola fechada $Y = B[q; \epsilon] \subset \mathbb{R}^3$ não chegaremos a lugar nenhum, pois X e Y permanecem conexos depois da retirada de qualquer um de seus pontos. É intuitivo que uma bola aberta de $\mathbb{R}^m$ só é homeomorfa a uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$ quando $m = n$. Isso é verdade, e a demonstração desse fato faz uso de um importante teorema de Topologia, cuja demonstração o leitor pode encontrar em [15, Theorem 36.5].

Teorema 2.6.2 (Invariância do domínio)**.** *Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação injetora e contínua, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Então $f(U)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e f é um mergulho.*

Corolário 2.6.3. Se uma bola aberta de $\mathbb{R}^m$ é homeomorfa a uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$, então $m = n$.

Demonstração. Como uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$ é homeomorfa a $\mathbb{R}^n$, podemos supor que as bolas abertas sejam os espaços $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$. Suponha, por absurdo, que $m > n$, e considere o homeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ entre os espaços Euclidianos. Denotando por $i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o mergulho canônico

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m,$$

obtemos um mergulho $\xi = i \circ \varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ que a cada ponto $x \in \mathbb{R}^m$ associa o ponto $\xi(x) = (\varphi(x), 0) \in \mathbb{R}^m$. No entanto, a imagem de $\mathbb{R}^m$ pelo mergulho ξ não é um aberto em $\mathbb{R}^m$, contradizendo o Teorema 2.6.2. □

Capítulo 3

Variedades diferenciáveis

A Geometria Diferencial é a área que estuda as chamadas variedades diferenciáveis, objetos que localmente se parecem com o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ e que é possível desenvolver o cálculo. Os exemplos mais simples, além do próprio espaço Euclidiano, são as curvas parametrizadas, as superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$ e, mais geralmente, as subvariedades Euclidianas.

As subvariedades Euclidianas, estudadas no Capítulo 2, ainda que possuem diversas propriedades interessantes e constituem uma classe ampla de exemplos, possuem uma certa limitação. Existem objetos importantes, de natureza semelhante a estas, mas que não se apresentam como subconjuntos de algum espaço euclidiano. Exemplos de tais conjuntos são os espaço projetivos e, mais geralmente, as variedades Grassmanianas.

Neste capítulo apresentaremos, em detalhes, a noção de variedade diferenciável e estudaremos os conceitos, vistos anteriormente para as subvariedades Euclidianas, de aplicações diferenciáveis entre estes objetos.

3.1 Variedades diferenciáveis

Nesta seção introduziremos a noção de variedade diferenciável. Assumiremos, como já vínhamos fazendo no capítulo anterior, que a classe de diferenciabilidade dos objetos, bem como para as aplicações envolvidas, será sempre de classe C^∞.

Fixemos um conjunto M. Uma *carta local* em M é simplesmente uma bijeção $\varphi : U \to \varphi(U)$, onde U é um subconjunto de M e $\varphi(U)$ é um aberto de algum espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, a qual será denotada por (U, φ).

Definição 3.1.1. Duas cartas locais (U, φ) e (V, ψ) num conjunto M são ditas *compatíveis* se $\varphi(U \cap V)$ e $\psi(U \cap V)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e a *aplicação de transição* $\psi \circ \varphi^{-1}$ é um difeomorfismo.

Note que a condição de $\psi \circ \varphi^{-1}$ ser um difeomorfismo implica que $\varphi \circ \psi^{-1}$ também é um difeomorfismo. Se $U \cap V = \emptyset$, a aplicação de transição $\psi \circ \varphi^{-1}$ é a aplicação vazia. Convencionaremos que a aplicação vazia é um difeomorfismo, logo φ e ψ também são compatíveis neste caso.

Observação 3.1.2. A noção de compatibilidade para cartas locais (U, φ) e (V, ψ) faria sentido também na situação mais geral em que $\varphi(U)$ é um aberto de $\mathbb{R}^m$ e $\psi(V)$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$ onde, a princípio, m não precisa ser igual a n. Mas se $U \cap V \neq \emptyset$, tal compatibilidade implicaria na existência de um difeomorfismo de um aberto não-vazio de $\mathbb{R}^m$ sobre um aberto de $\mathbb{R}^n$, o que implicaria $m = n$.

Definição 3.1.3. Um *atlas* $\mathcal{A}$ de dimensão n num conjunto M é uma coleção $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$ de cartas locais em M, duas a duas compatíveis, onde cada $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, e tal que $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

Exemplo 3.1.4. Um exemplo simples de atlas em $\mathbb{R}^n$ é dado pelo conjunto $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, \mathrm{Id})\}$. Na esfera unitária $\mathbb{S}^n$, um atlas é dado pelo conjunto

$$\mathcal{A} = \{(\mathbb{S}^n \setminus \{N\}, \varphi_N), (\mathbb{S}^n \setminus \{S\}, \varphi_S)\},$$

onde φ_N e φ_S denotam as projeções estereográficas relativas ao polos norte e sul, respectivamente.

Fixemos um atlas $\mathcal{A}$ num conjunto M. Uma carta local φ em M é dita *compatível* com $\mathcal{A}$ se φ é compatível com toda carta local $\psi \in \mathcal{A}$. A noção de compatibilidade é reflexiva e simétrica, mas não é transitiva. De fato, se (U, φ), (V, ψ), (W, ξ) são cartas locais em M, com φ sendo compatível com ψ, e ψ sendo compatível com ξ, então só podemos garantir que a aplicação de transição $\xi \circ \varphi^{-1}$ seja diferenciável em $\varphi(U \cap V \cap W)$. É bem possível, por exemplo, que $U \cap V = \emptyset$, $V \cap W = \emptyset$, tornando a compatibilidade entre φ, ψ e ψ, ξ triviais. No entanto, pode-se ter $U \cap W \neq \emptyset$ e φ, ξ não serem compatíveis.

O lema seguinte nos diz como lidar com essa situação.

Lema 3.1.5. Seja $\mathcal{A}$ um atlas num conjunto M. Se (U, φ) e (V, ψ) são cartas locais em M, ambas compatíveis com $\mathcal{A}$, então φ e ψ são compatíveis.

Demonstração. Supondo $U \cap V \neq \emptyset$, devemos provar que $\varphi(U \cap V)$ e $\psi(U \cap V)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e que $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ é um difeomorfismo. Como $U = \bigcup_{\alpha \in I}(U \cap U_\alpha)$, segue que

$$\varphi(U \cap V) = \bigcup_{\alpha \in I} \varphi(U \cap V \cap U_\alpha).$$

Assim, basta provar que, para cada índice $\alpha \in I$, $\varphi(U \cap V \cap U_\alpha)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e que $\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V \cap U_\alpha)}$ é diferenciável. De fato, como (U, φ) e (V, ψ) são cartas compatíveis com $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, segue que $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U)$ e $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ é um difeomorfismo. Assim,

$$\begin{aligned} \varphi(U \cap V \cap U_\alpha) &= (\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(U \cap V \cap U_\alpha)) \\ &= (\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U) \cap \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V)) \end{aligned}$$

é aberto em $\mathbb{R}^n$. Finalmente,

$$\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V \cap U_\alpha)} = (\psi \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(U \cap V \cap U_\alpha)},$$

que é diferenciável. □

Um atlas $\mathcal{A}$ num conjunto M é dito ser *maximal* se não está propriamente contido em nenhum outro atlas em M. O lema seguinte garante que todo atlas está contido num único atlas maximal.

Lema 3.1.6. Dado um atlas $\mathcal{A}$ num conjunto M, existe um único atlas maximal em M que contém $\mathcal{A}$.

Demonstração. Seja $\mathcal{A}_{\max}$ o conjunto formado por todas as cartas locais de M que são compatíveis com $\mathcal{A}$. Disso decorre que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\max}$. Além disso, o Lema 3.1.5 garante que $\mathcal{A}_{\max}$ é de fato um atlas em M. Quanto à maximalidade, considere um atlas $\mathcal{B}$ em M, contendo $\mathcal{A}$. Disso decorre que todo elemento de $\mathcal{B}$ é compatível com $\mathcal{A}$, logo, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_{\max}$. Finalmente, quanto à unicidade, suponha que exista um atlas maximal $\mathcal{B}$ em M, com $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Disso decorre que todo elemento de $\mathcal{B}$ é compatível com $\mathcal{A}$, logo $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_{\max}$. Como $\mathcal{B}$ é maximal tem-se, necessariamente, que $\mathcal{B} = \mathcal{A}_{\max}$. □

Lema 3.1.7. Dado um atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$ num conjunto M, existe uma única topologia em M que torna cada U_α aberto em M e cada φ_α um homeomorfismo.

Demonstração. Defina

$$\tau_{\mathcal{A}} = \{V \subset M : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V) \text{ é aberto em } \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in I\}.$$

O fato de que $\tau_{\mathcal{A}}$ é uma topologia segue das igualdades

$$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap \emptyset) = \emptyset, \quad \varphi_\alpha(U_\alpha \cap M) = \varphi_\alpha(U_\alpha),$$

$$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_1 \cap V_2) = \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_1) \cap \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_2),$$

$$\varphi_\alpha\left(U_\alpha \cap (\cup V_\lambda)\right) = \cup \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_\lambda),$$

onde $\lambda \in J$. A fim de mostrar que cada U_α é um aberto em M e cada φ_α é um homeomorfismo, basta provar a seguinte afirmação: dados $\alpha \in I$ e $V \subset U_\alpha$, tem-se que $V \in \tau_{\mathcal{A}}$ se, e somente se, $\varphi_\alpha(V)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$. De fato, se $V \in \tau_{\mathcal{A}}$ então $\varphi_\alpha(V) = \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$. Reciprocamente, suponha $\varphi_\alpha(V)$ aberto em $\mathbb{R}^n$. Para que $V \in \tau_{\mathcal{A}}$, devemos provar que $\varphi_\beta(U_\beta \cap V)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, para todo $\beta \in I$. No entanto, isso segue da igualdade

$$\begin{aligned}\varphi_\beta(U_\beta \cap V) &= \varphi_\beta(U_\beta \cap V \cap U_\alpha) \\ &= (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(V) \cap \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta))\end{aligned}$$

e do fato que

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

é um homeomorfismo ente abertos de $\mathbb{R}^n$. Quanto à unicidade, seja τ uma topologia em M que torna cada U_α aberto em M e cada φ_α um homeomorfismo. Dado $V \in \tau$, tem-se $V \cap U_\alpha \in \tau$, para todo $\alpha \in I$, logo $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$. Isso mostra que $V \in \tau_{\mathcal{A}}$, logo $\tau \subset \tau_{\mathcal{A}}$. Por outro lado, dado $V \in \tau_{\mathcal{A}}$, tem-se que $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, para todo $\alpha \in I$. Assim, $V \cap U_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V))$ é aberto em (M, τ), para todo $\alpha \in I$. Logo, $V = \bigcup_{\alpha \in I} V \cap U_\alpha$ é aberto em (M, τ), provando que $\tau_{\mathcal{A}} \subset \tau$. □

A topologia $\tau_{\mathcal{A}}$, dada pelo Lema 3.1.7, será chamada a *topologia induzida* pelo atlas $\mathcal{A}$ no conjunto M.

Observação 3.1.8. Se dois atlas $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ num conjunto M são tais que a união $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ também é um atlas em M, então as topologias induzidas em M por $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ coincidem (cf. Exercício 3.1.1). Disso decorre, em particular, que a topologia induzida por um atlas $\mathcal{A}$ coincide com a topologia induzida pelo atlas maximal que o contém.

Antes de introduzirmos a definição central dessa seção, lembremos que uma topologia num conjunto M é dita *Hausdorff* se dois pontos distintos quaisquer de M pertencem a abertos disjuntos. Além disso, uma topologia *satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade* se ela possui uma base enumerável de abertos.

Definição 3.1.9. Uma *variedade diferenciável* de dimensão n é um par $(M, \mathcal{A})$, onde M é um conjunto e $\mathcal{A}$ é um atlas maximal de dimensão n em M, de modo que a topologia induzida em M por $\mathcal{A}$ é Hausdorff e satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade.

Quando nos referirmos à topologia de uma variedade diferenciável, estaremos sempre nos referindo à topologia induzida pelo seu atlas. A exigência de que o atlas seja maximal, bem como as condições impostas sobre a topologia de uma variedade diferenciável não são essenciais, no sentido de que não são necessárias ao longo de toda a teoria de variedades, mas são hipóteses padrão e necessárias em diversos teoremas centrais da teoria, como veremos ao longo do texto.

Para simplificar a notação e quando não houver perigo de confusão, escreveremos apenas M^n para denotar a variedade diferenciável $(M, \mathcal{A})$ de dimensão n. Quando dissermos que (U, φ) é uma carta local de M, significaremos que φ é um elemento do atlas maximal $\mathcal{A}$ e não apenas que φ é uma bijeção arbitrária definida num subconjunto $U \subset M$.

Exemplo 3.1.10. O conjunto unitário $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, \mathrm{Id})\}$ é um atlas em $\mathbb{R}^n$. Além disso, como a aplicação identidade Id é um homeomorfismo, com domínio aberto em relação à topologia usual de $\mathbb{R}^n$, segue que a topologia induzida por $\mathcal{A}$ em $\mathbb{R}^n$ coincide com a topologia usual. O atlas maximal $\mathcal{A}_{\max}$ que contém $\mathcal{A}$ consiste de todos os difeomorfismos $\varphi : U \to \varphi(U)$, onde U e $\varphi(U)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 3.1.11. Sejam $(M, \mathcal{A})$ uma variedade diferenciável e U um aberto de $(M, \tau_{\mathcal{A}})$. Para cada $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$, sejam $\widetilde{U}_\alpha = U \cap U_\alpha$ e $\widetilde{\varphi}_\alpha = \varphi_\alpha|_{\widetilde{U}_\alpha}$, e considere o conjunto

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \{(\widetilde{U}_\alpha, \widetilde{\varphi}_\alpha) : (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}\}.$$

Claramente $\widetilde{\mathcal{A}}$ é um atlas em U. Denotemos por τ a topologia induzida por $\tau_{\mathcal{A}}$ em U, e por $\tau_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ a topologia induzida por $\widetilde{\mathcal{A}}$ em U. Mostremos que $\tau_{\widetilde{\mathcal{A}}} = \tau$. De fato, dado $V \in \tau$, tem-se $V = U \cap W$, onde $W \in \tau_{\mathcal{A}}$. Assim,

$$\widetilde{\varphi}_\alpha(\widetilde{U}_\alpha \cap V) = \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha \cap V) = \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha \cap W),$$

que é aberto em $\mathbb{R}^n$, logo $V \in \tau_{\widetilde{\mathcal{A}}}$. Por outro lado, dado $V \in \tau_{\widetilde{\mathcal{A}}}$, segue que $\widetilde{\varphi}_\alpha(\widetilde{U}_\alpha \cap V) = \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha \cap V)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$. Disso decorre que $U \cap V \in \tau_{\mathcal{A}}$. Assim, $V = U \cap (U \cap V) \in \tau$, logo $V \in \tau$. Portanto, a topologia $\tau_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ é Hausdorff e satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade, logo $(U, \widetilde{\mathcal{A}})$ também é uma variedade diferenciável.

Exemplo 3.1.12. Dado um espaço vetorial real E de dimensão n, o conjunto $\mathcal{A}$ de todos os isomorfismos lineares $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ é um atlas em E. Assim E, munido do único atlas maximal que contém $\mathcal{A}$, é uma variedade diferenciável. A topologia induzida por $\mathcal{A}$ em E é a topologia usual, induzida por qualquer norma em E.

Os espaços vetoriais reais de dimensão finita serão sempre considerados como variedades diferenciáveis, munidos do atlas maximal que contém as cartas lineares.

3.2 A topologia de uma variedade diferenciável

O lema seguinte nos dá condições para que a topologia induzida por um atlas numa variedade diferenciável coincide com uma dada topologia, previamente fixada na variedade.

Lema 3.2.1. Sejam $(M^n, \mathcal{A})$ uma variedade diferenciável e considere uma topologia τ no conjunto M. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $\tau = \tau_{\mathcal{A}}$.

(b) Para toda carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$, tem-se $U_\alpha \in \tau$ e φ_α é um homeomorfismo em relação à topologia induzida em U_α por τ;

(c) Existe um atlas $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ tal que vale (b) para toda carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \widetilde{\mathcal{A}}$.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$ segue do fato que $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$ é homeomorfismo segundo a topologia $\tau_{\mathcal{A}}$. Para mostrar $(b) \Rightarrow (c)$, basta considerar $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$. Finalmente, a fim de provar que $(c) \Rightarrow (a)$, basta provar que a aplicação identidade $\mathrm{Id} : (M, \tau) \to (M, \tau_{\mathcal{A}})$ é um homeomorfismo. De fato, para todo $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ segue por hipótese que $U_\alpha \in \tau_{\mathcal{A}}$, $U_\alpha \in \tau$, $\varphi_\alpha : (U_\alpha, \tau_{\mathcal{A}}) \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$ e $\varphi_\alpha : (U_\alpha, \tau) \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$ são homeomorfismos. Como o diagrama

$$\begin{tikzcd} (U_\alpha, \tau) \arrow[rr, "\mathrm{Id}"] \arrow[dr, "\varphi_\alpha"'] & & (U_\alpha, \tau_{\mathcal{A}}) \arrow[dl, "\varphi_\alpha"] \\ & \varphi_\alpha(U_\alpha) & \end{tikzcd}$$

é comutativo, segue que $\mathrm{Id} : (U_\alpha, \tau) \to (U_\alpha, \tau_{\mathcal{A}})$ é um homeomorfismo. Além disso, como $M = \bigcup_{\alpha \in \widetilde{I}} U_\alpha$, segue que $\mathrm{Id} : (M, \tau) \to (M, \tau_{\mathcal{A}})$ é um homeomorfismo, concluindo a demonstração. $\square$

Como aplicação do Lema 3.2.1, veremos que toda subvariedade Euclidiana é, naturalmente, uma variedade diferenciável.

Exemplo 3.2.2. Seja M^m uma subvariedade Euclidiana de $\mathbb{R}^n$. Para cada parametrização $\psi_\alpha : W_\alpha \to M \cap V_\alpha$ de M, denote por φ_α a inversa de ψ_α. Fazendo $U_\alpha = M \cap V_\alpha$, considere o conjunto

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \varphi_\alpha = \psi_\alpha^{-1}\}.$$

Segue do Teorema 2.4.1 que $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} = \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha$ é um difeomorfismo, logo $\mathcal{A}$ é um atlas de dimensão m em M. Além disso, como cada $\varphi_\alpha : U_\alpha \to W_\alpha$ é um homeomorfismo em relação à topologia induzida em M de $\mathbb{R}^n$, segue do Lema 3.2.1 que a topologia $\tau_{\mathcal{A}}$ coincide com a topologia usual de M e, portanto, $(M, \mathcal{A})$ torna-se naturalmente uma variedade diferenciável.

A esfera unitária $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é, em virtude do Exemplo 3.2.2, uma variedade diferenciável de dimensão n. Mais precisamente, quando considerarmos a esfera $\mathbb{S}^n$ como variedade, o atlas maximal considerado é aquele que contém as projeções estereográficas. Por outro lado, é um fato conhecido que a esfera $\mathbb{S}^n$ tem a mesma cardinalidade que $\mathbb{R}$ ou seja, existe uma bijeção $\varphi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ entre a esfera $\mathbb{S}^n$ e o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Vejamos o que ocorre se considerarmos essa bijeção φ como carta em $\mathbb{S}^n$.

Exemplo 3.2.3. Seja $\varphi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ uma bijeção entre a esfera $\mathbb{S}^n$ e o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Por definição, φ é uma carta global em $\mathbb{S}^n$. Se $\mathcal{A}$ denota o único atlas maximal que contém φ, então $(\mathbb{S}^n, \mathcal{A})$ é uma variedade diferenciável de dimensão 1. Observe que tal bijeção φ não é um homeomorfismo, se considerarmos $\mathbb{S}^n$ com a topologia usual, induzida de $\mathbb{R}^{n+1}$. Segue então que a topologia $\tau_{\mathcal{A}}$ da variedade $(\mathbb{S}^n, \mathcal{A})$ não coincide com a topologia usual da esfera, aquela induzida de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exemplo 3.2.4 (Espaço projetivo real)**.** Em $M = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, definimos uma relação de equivalência $\sim$ pondo:

$$x \sim y \Leftrightarrow y = tx, \text{ para algum } t \neq 0.$$

O espaço quociente $\mathbb{R}P^n = M/{\sim}$ chama-se o *espaço projetivo real*. Provaremos que $\mathbb{R}P^n$ é uma variedade diferenciável de dimensão n. Geometricamente, cada classe $[x] \in \mathbb{R}P^n$ pode ser identificada com a reta em $\mathbb{R}^{n+1}$ que passa pela origem, cuja direção é dada pelo vetor x. Provemos, inicialmente, que a topologia quociente τ em $\mathbb{R}P^n$ é Hausdorff e satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade. De fato, consideremos a aplicação quociente $\pi : M \to \mathbb{R}P^n$ e fixemos um subconjunto aberto $A \subset M$. Temos:

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(A)) &= \{x \in M : x \sim a, \text{ para algum } a \in A\} \\ &= \bigcup_{t \neq 0} tA, \end{aligned}$$

onde $tA = \{tx : x \in A\}$. Como cada conjunto tA é aberto em M, segue que $\pi^{-1}(\pi(A))$ é aberto. Logo, por definição de topologia quociente, $\pi(A)$ é aberto, logo π é aberta. Assim, como M satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade, $M/\sim$ também o satisfaz (cf. Exercício 1). A fim de provar que τ é Hausdorff, considere a função $f : M \times M \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \sum_{i \neq j} (x_i y_j - x_j y_i)^2,$$

para quaisquer $x, y \in M$. Note que

$$\begin{aligned} f(x, y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x_i y_j - x_j y_i = 0, \ i \neq j \\ &\Leftrightarrow \quad y_i = t x_i, \text{ para algum } t \neq 0, 1 \leq i \leq n+1 \\ &\Leftrightarrow \quad x \sim y. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$R = \{(x, y) \in M \times M : x \sim y\} = f^{-1}(0).$$

Como f é contínua, R é fechado em $M \times M$, logo $(\mathbb{R}P^n, \tau)$ é de Hausdorff (cf. Exercício 1). A fim de construir um atlas em $\mathbb{R}P^n$ considere, para cada $1 \leq i \leq n+1$, o aberto $\widetilde{U}_i$ em M dado por

$$\widetilde{U}_i = \{x \in M : x_i \neq 0\}.$$

Além disso, defina uma aplicação $\widetilde{\varphi}_i : \widetilde{U}_i \to \mathbb{R}^n$ pondo

$$\widetilde{\varphi}_i(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{x_i}(x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_{n+1}).$$

Observe que $\widetilde{\varphi}_i$ é contínua, pois suas funções coordenadas são contínuas; $\widetilde{\varphi}_i$ também é sobrejetora. De fato, dado $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, considere

$$\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_n) \in \widetilde{U}_i.$$

Assim, tem-se $\widetilde{\varphi}_i(\widetilde{x}) = x$. Além disso, como

$$x \sim y \Leftrightarrow \widetilde{\varphi}_i(x) = \widetilde{\varphi}_i(y),$$

segue do lema de passagem ao quociente que, para cada $1 \leq i \leq n+1$, existe uma bijeção contínua $\varphi_i : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}^n$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \widetilde{U}_i \arrow[r, "\widetilde{\varphi}_i"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R}^n \\ \mathbb{R}P^n \arrow[ur, "\varphi_i"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo. Seja $U_i = \pi(\widetilde{U}_i)$. Provemos que o conjunto

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) : 1 \leq i \leq n+1\}$$

é um atlas de dimensão n em $\mathbb{R}P^n$. Note que

$$\varphi_i^{-1}(x_, \ldots, x_n) = \pi(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_n),$$

para todo $1 \leq i \leq n+1$. Assim, dados $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j) \in \mathcal{A}$, com $i < j$, temos:

$$\begin{aligned} (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(x) &= \varphi_j(\pi(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_n)) \\ &= \widetilde{\varphi}_j(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_n) \\ &= \frac{1}{x_j}(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

logo $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ é diferenciável. Finalmente, resta provar que $\tau_{\mathcal{A}} = \tau$. De fato, como $\pi^{-1}(U_i) = \widetilde{U}_i$ é aberto em M, segue que U_i é aberto em $(\mathbb{R}P^n, \tau)$. Além disso, da igualdade

$$\varphi_i^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \pi(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_n),$$

segue que φ_i^{-1} é contínua. Assim, $\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i)$ é um homeomorfismo relativo à topologia τ e, em virtude do Lema 3.2.1, segue que $\tau_{\mathcal{A}} = \tau$.

Vejamos a seguir um exemplo simples de variedade, cuja topologia induzida não é Hausdorff.

Exemplo 3.2.5. Em $\mathbb{R}^2$, considere os subconjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}, \\ B &= \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}, \\ C &= \{(x, -1) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}. \end{aligned}$$

Sejam $U_1 = A \cup B$ e $U_2 = B \cup C$, e defina as aplicações $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}$ e $\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}$ pondo

$$\varphi_1(x, y) = x \quad \text{e} \quad \varphi_2(x, y) = x.$$

O conjunto $\mathcal{A} = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ é um atlas em $M = A \cup B \cup C$. No entanto, a topologia $\tau_{\mathcal{A}}$ não é Hausdorff, pois qualquer vizinhança em torno dos pontos $(0, 1)$ e $(0, -1)$ têm pontos em comum.

3.3 Aplicações diferenciáveis

A relação básica entre variedades diferenciáveis é a noção de aplicação diferenciável. Este conceito, visto inicialmente entre espaços Euclidianos, se generaliza naturalmente para variedades diferenciáveis, pois estas se comportam, localmente, como se fossem subconjuntos abertos de algum espaço Euclidiano. Uma aplicação diferenciável entre variedades é definida como sendo uma aplicação, cuja representação em relação à cartas locais das duas variedades, seja diferenciável no sentido usual.

Definição 3.3.1. Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Dizemos que uma aplicação $f : M \to N$ é *diferenciável num ponto* $p \in M$ se existem cartas locais (U, φ) em M e (V, ψ) em N, com $p \in U$ e $f(U) \subset V$, de modo que a aplicação $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ seja diferenciável no ponto $\varphi(p)$.

A composição $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é chamada a *representação* de f em relação às cartas locais (U, φ) e (V, ψ). Diremos simplesmente que f é *diferenciável* se for diferenciável em todos os pontos de M.

A definição 3.3.1 independe da escolha das cartas locais. De fato, sejam (U', φ') e (V', ψ') cartas locais em M e N, respectivamente, com $p \in U'$ e $f(U') \subset V'$. Então, no aberto $\varphi'(U' \cap U)$, temos:

$$\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1} = (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi'^{-1}).$$

Como φ e φ', ψ e ψ' são compatíveis e $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável, segue que $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}$ também é diferenciável.

Uma aplicação $f : M \to N$ é um *difeomorfismo* se f é uma bijeção diferenciável, cuja inversa $f^{-1} : N \to M$ também é diferenciável. Uma aplicação $f : M \to N$ chama-se um *difeomorfismo local* se todo ponto $p \in M$ possui uma vizinhança aberta $U \subset M$ tal que $f(U)$ é aberto em N e a restrição $f|_U : U \to f(U)$ é um difeomorfismo.

Exemplo 3.3.2. Se U é um aberto de $\mathbb{R}^m$, então U é uma variedade diferenciável, e a aplicação identidade $\mathrm{Id} : U \to U$ é uma carta local em U. Assim, dado uma variedade diferenciável N^n, uma aplicação $f : U \to N$ é diferenciável se, e somente se, para todo $p \in U$, existem um aberto $W \subset U$, com $p \in W$, e uma carta local (V, ψ) em N, com $f(W) \subset V$, tal que $\psi \circ f|_W$ é diferenciável. Disso decorre, em particular, no caso em que $N^n = \mathbb{R}^n$, que f é diferenciável no sentido de variedades se, e somente se, é diferenciável no sentido do Cálculo.

A proposição seguinte mostra que as cartas locais de uma variedade diferenciável M^n são difeomorfismos entre abertos de M e abertos de $\mathbb{R}^n$.

Proposição 3.3.3. Seja $(M^n, \mathcal{A})$ uma variedade diferenciável. Dados um subconjunto $U \subset M$ e um aberto $W \subset \mathbb{R}^n$, uma bijeção $\varphi : U \to W$ pertence ao atlas $\mathcal{A}$ se, e somente se, U é aberto em M e φ é um difeomorfismo.

Demonstração. Se (U, φ) é uma carta local de M, então U é aberto em M. Considere as representações de φ e φ^{-1} em relação às cartas φ na variedade U e Id na variedade $W = \varphi(U)$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi"'] & W \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\ W \arrow[r, "\mathrm{Id}\circ\varphi\circ\varphi^{-1}"] & W \end{tikzcd}$$

Tais representações são iguais a aplicação identidade de W, que é diferenciável. Logo, φ é um difeomorfismo. Reciprocamente, suponha que U é aberto em M e que $\varphi : U \to W$ seja um difeomorfismo. Devemos provar que φ é compatível com o atlas $\mathcal{A}$. Dado uma carta local $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, como φ e ψ são homeomorfismos entre abertos, segue que $\varphi(U \cap V)$ e $\psi(U \cap V)$ são abertos de $\mathbb{R}^n$. A aplicação de transição $\psi \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável, pois é a representação da aplicação $\varphi^{-1} : W \to U$ em relação às cartas locais $\mathrm{Id} : \varphi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$ e $\psi|_{U \cap V} : U \cap V \to \psi(U \cap V)$. Analogamente se prova que $\varphi \circ \psi^{-1}$ é diferenciável. $\square$

O corolário seguinte é útil quando queremos provar resultados sobre unicidade de estruturas diferenciáveis satisfazendo certas condições.

Corolário 3.3.4. Dois atlas maximais $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ num conjunto M são iguais se, e somente se, a aplicação identidade $\mathrm{Id} : (M, \mathcal{A}_1) \to (M, \mathcal{A}_2)$ é um difeomorfismo.

Demonstração. Suponha que a aplicação identidade Id seja um difeomorfismo. Assim, Id é, em particular, um homeomorfismo, logo $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ induzem a mesma topologia em M. Dado um aberto $U \subset M$, denotemos por $\mathcal{A}_1|_U$, $\mathcal{A}_2|_U$ os atlas induzidos em U por $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, respectivamente. Assim, $\mathrm{Id} : (U, \mathcal{A}_1|_U) \to (U, \mathcal{A}_2|_U)$ é um difeomorfismo. Sejam $V \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\varphi : U \to V$ uma bijeção. Temos, assim, um diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
(U, \mathcal{A}_1|_U) \arrow[rr, "\mathrm{Id}"] \arrow[dr, "1", "\varphi"'] & & (U, \mathcal{A}_2|_U) \arrow[dl, "2"', "\varphi"] \\
& V &
\end{tikzcd}$$

A flecha 1 no diagrama é um difeomorfismo se, e somente se, a flecha 2 o for. Segue da Proposição 3.3.3 que $\varphi \in \mathcal{A}_1$ se, e somente se, $\varphi \in \mathcal{A}_2$. $\square$

Exemplo 3.3.5. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(t) = t^3$, é um homeomorfismo, cuja inversa é $f^{-1}(t) = t^{1/3}$, que não é diferenciável em $t = 0$, logo f não é um difeomorfismo. Sejam $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ e $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ estruturas de variedades diferenciáveis em $\mathbb{R}$ determinadas pelos atlas

$$\{(\mathbb{R}, \mathrm{Id})\} \quad \text{e} \quad \{(\mathbb{R}, f)\},$$

respectivamente. Note que $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não são compatíveis, pois $(\mathrm{Id} \circ f^{-1})(t) = t^{1/3}$ não é diferenciável em $t = 0$. Assim $(\mathbb{R}, \mathcal{A}) \neq (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Por outro lado, $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ e $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ são variedades difeomorfas, pois a aplicação $\phi : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, dada por $\phi(t) = t^{1/3}$, é um difeomorfismo. De fato, a representação de ϕ é a aplicação identidade $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que é um difeomorfismo.

O Exemplo 3.3.5 fornece, na verdade, um exemplo de estruturas diferenciáveis equivalentes, no sentido da definição seguinte.

Definição 3.3.6. Duas variedades diferenciáveis $(M, \mathcal{A})$ e $(M, \mathcal{B})$, onde $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são atlas maximais distintos sobre M, são ditas *equivalentes* se existe um difeomorfismo entre $(M, \mathcal{A})$ e $(M, \mathcal{B})$.

Em virtude do Exercício 3.3.1, decorre que todo difeomorfismo é um homeomorfismo. Este fato reporta naturalmente à questão da unicidade da estrutura diferenciável, ou seja, sobre a recíproca do Exercício 3.3.1. Mais precisamente, o problema que se propõe é saber se duas estruturas diferenciáveis quaisquer numa variedade são sempre equivalentes. Em dimensões baixas isso é sempre verdade. O leitor interessado pode consultar [10, Problem 2.5] ou [19, Problem 9.24] para o caso 1-dimensional não-compacto:

qualquer estrutura diferenciável em $\mathbb{R}$ é difeomorfa à estrutura usual $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$, onde $\mathcal{A}$ é o único atlas maximal que contém a aplicação identidade.

Em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ o resultado também é verdadeiro. De fato, segue do trabalho de Munkres [16] (cf. também [13]) que toda variedade topológica de dimensão menor ou igual a 3 admite uma estrutura diferenciável que é única a menos de difeomorfismos. Por outro lado, em $\mathbb{R}^4$ existem exemplos de estruturas diferenciáveis que não são difeomorfas à estrutura diferenciável usual $(\mathbb{R}^4, \mathcal{A})$. Tais estruturas foram apresentadas por Donaldson [5] e Freedman [6], como consequência de seus estudos em geometria e topologia das variedades compactas de dimensão 4. Na esfera $\mathbb{S}^n$, quaisquer duas estruturas diferenciáveis são difeomorfas, para $n \leq 6$. Em 1956 Milnor [12] apresentou a construção de uma estrutura diferenciável exótica em $\mathbb{S}^7$, ou seja, uma variedade diferenciável homeomorfa mas não difeomorfa à esfera $\mathbb{S}^7$.

Outro problema básico neste contexto é a questão da existência de uma estrutura diferenciável. Mais precisamente, dado um espaço topológico M, munido de um atlas maximal $\mathcal{A}$ de classe C^0, o problema que se propõe é saber se sempre existe um atlas diferenciável $\mathcal{B}$, com $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. De forma independente, Smale e Kervaire [9] exibiram exemplos de espaços topológicos que não admitem estrutura de variedade diferenciável.

3.4 A diferencial de uma aplicação diferenciável

A noção de espaço tangente a uma variedade diferenciável M num ponto p motiva-se pela questão de como definir a diferencial de uma aplicação diferenciável $f : M \to N$ entre duas variedades M e N. A ideia natural é definir a diferencial de f em $p \in M$ como sendo a diferencial no ponto $\varphi(p)$ da representação $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ de f em relação às cartas locais φ e ψ. Ocorre que esta representação depende da escolha das cartas φ e ψ, e não apenas de f. O problema inicial então é encontrar o objeto correto que deve ser a diferencial de f no ponto $p \in M$.

Intuitivamente, queremos que a diferencial num ponto $p \in M$ de uma aplicação diferenciável $f : M \to N$ seja uma aplicação linear definida num espaço vetorial associado a M e ao ponto p, e tomando valores num espaço vetorial associado a N e ao ponto $f(p)$. O espaço vetorial associado a M e a p deve ter um papel análogo ao papel do espaço tangente a uma subvariedade Euclidiana M em $\mathbb{R}^n$.

Lembremos que o espaço tangente T_pM a uma subvariedade Euclidiana M em $\mathbb{R}^n$, num certo ponto $p \in M$, é o conjunto de todos os vetores $v \in \mathbb{R}^n$ da forma $v = \lambda'(0)$, onde $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é uma curva diferenciável em

$t = 0$, com $\lambda(0) = p$. Quando M é uma variedade diferenciável, os vetores tangentes deverão ser definidos de outra forma, visto que M não está contida, necessariamente, em algum espaço Euclidiano. Veremos a seguir uma das maneiras de se definir o espaço tangente.

Dado uma variedade diferenciável M^n e fixado um ponto $p \in M$, denotemos por C_p o conjunto de todas as curvas diferenciáveis $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, com $\lambda(0) = p$. Dizemos que duas curvas $\lambda, \mu \in C_p$ são *equivalentes*, e escreveremos $\lambda \sim \mu$, se existe uma carta local (U, φ) em M, com $p \in U$, tal que

$$(\varphi \circ \lambda)'(0) = (\varphi \circ \mu)'(0). \tag{3.1}$$

Note que, como λ e μ são contínuas e $U \subset M$ é aberto, temos que as compostas $\varphi \circ \lambda$ e $\varphi \circ \mu$ estão definidas numa vizinhança da origem em $\mathbb{R}$.

Observação 3.4.1. A definição dada em (3.1) independe da escolha da carta. De fato, se (V, ψ) é outra carta local em M, com $p \in V$, segue da regra da cadeia que:

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \lambda)'(0) &= (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \lambda)'(0) \\
&= \mathrm{d}(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot (\varphi \circ \lambda)'(0) \\
&= \mathrm{d}(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot (\varphi \circ \mu)'(0) \\
&= (\psi \circ \mu)'(0).
\end{aligned}$$

Além disso, fica a cargo do leitor verificar que a relação definida em (3.1) é uma relação de equivalência em C_p.

Definição 3.4.2. O *espaço tangente* à variedade diferenciável M no ponto p é definido como o classe de equivalência $C_p/\sim$, e será denotado por T_pM.

Devemos verificar agora que T_pM possuiu as propriedades que se espera para um espaço tangente. Dados um ponto $p \in M$ e uma carta local (U, φ) em M, com $p \in U$, definimos uma aplicação $\overline{\varphi} : T_pM \to \mathbb{R}^n$ pondo

$$\overline{\varphi}([\lambda]) = (\varphi \circ \lambda)'(0), \tag{3.2}$$

para toda classe $[\lambda] \in T_pM$. Segue da Observação 3.4.1 que $\overline{\varphi}$ está bem definida. Afirmamos que $\overline{\varphi}$ é bijetora. De fato, dados $[\lambda], [\mu] \in T_pM$, temos:

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}([\lambda]) = \overline{\varphi}([\mu]) &\Leftrightarrow (\varphi \circ \lambda)'(0) = (\varphi \circ \mu)'(0) \\
&\Leftrightarrow \lambda \sim \mu \\
&\Leftrightarrow [\lambda] = [\mu],
\end{aligned}$$

ou seja, $\overline{\varphi}$ é injetora. Além disso, dado $v \in \mathbb{R}^n$, considere a curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \varphi(U)$ definida por $\alpha(t) = \varphi(p) + tv$. Pondo $\lambda = \varphi^{-1} \circ \alpha$, temos:

$$\overline{\varphi}([\lambda]) = (\varphi \circ \lambda)'(0) = (\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \alpha)'(0) = \alpha'(0) = v,$$

ou seja, $\overline{\varphi}$ é sobrejetora. Assim, sendo $\overline{\varphi}$ uma bijeção, existe uma única estrutura de espaço vetorial em T_pM que torna $\overline{\varphi}$ um isomorfismo linear. Mais precisamente, definimos:

$$\begin{aligned} [\lambda] + [\mu] &= \overline{\varphi}^{-1} \left(\overline{\varphi}([\lambda]) + \overline{\varphi}([\mu]) \right), \\ c \cdot [\lambda] &= \overline{\varphi}^{-1} \left(c \cdot \overline{\varphi}([\lambda]) \right), \end{aligned} \tag{3.3}$$

para quaisquer $[\lambda], [\mu] \in T_pM$ e $c \in \mathbb{R}$.

Veremos na seção seguinte que o isomorfismo linear $\overline{\varphi} : T_pM \to \mathbb{R}^n$, definido em (3.2), será identificado com a diferencial de uma carta local em M na vizinhança do ponto p.

Observação 3.4.3. A estrutura de espaço vetorial induzida em T_pM, por (3.3), independe da escolha da carta local. De fato, se (V, ψ) é outra carta local de M, com $p \in V$, temos:

$$\begin{aligned} \overline{\psi}([\lambda]) &= (\psi \circ \lambda)'(0) \\ &= (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \lambda)'(0) \\ &= \mathrm{d}(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot \overline{\varphi}([\lambda]), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\overline{\psi} = T \circ \overline{\varphi},$$

onde T é o isomorfismo linear dado por $T = \mathrm{d}(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$. Portanto

$$\begin{aligned} \overline{\psi}^{-1}(\overline{\psi}([\lambda]) + \overline{\psi}([\mu])) &= (\overline{\varphi}^{-1} \circ T^{-1})(T \circ \overline{\varphi}([\lambda]) + T \circ \overline{\varphi}([\mu])) \\ &= \overline{\varphi}^{-1}(\overline{\varphi}([\lambda]) + \overline{\varphi}([\mu])). \end{aligned}$$

De forma análoga podemos mostrar que

$$\overline{\psi}^{-1}(c \cdot \overline{\psi}([\lambda])) = \overline{\varphi}^{-1}(c \cdot \overline{\varphi}([\lambda])),$$

para qualquer $c \in \mathbb{R}$. Portanto, quaisquer duas cartas locais em M induzem a mesma estrutura de espaço vetorial em T_pM.

Dados uma aplicação diferenciável $f : M^m \to N^n$ e um ponto $p \in M$, definiremos uma aplicação entre os espaços tangentes T_pM e $T_{f(p)}N$, denotada por $\mathrm{d}f(p)$, pondo

$$\mathrm{d}f(p) \cdot [\lambda] = [f \circ \lambda], \tag{3.4}$$

para todo $[\lambda] \in T_pM$. A aplicação $\mathrm{d}f(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$, assim definida, é chamada a *diferencial* de f no ponto p. Devemos verificar que $\mathrm{d}f(p)$ está bem definida e é linear. De fato, considere cartas locais (U, φ) em M e (V, ψ) em N, com $p \in U$ e $f(U) \subset V$. Dado $[\lambda] \in T_pM$, temos:

$$\begin{aligned} \overline{\psi}([f \circ \lambda]) &= (\psi \circ f \circ \lambda)'(0) \\ &= (\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \lambda)'(0) \\ &= \mathrm{d}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot \overline{\varphi}([\lambda]), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathrm{d}f(p) \cdot [\lambda] = \overline{\psi}^{-1}\left(\mathrm{d}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot \overline{\varphi}([\lambda])\right). \tag{3.5}$$

A igualdade em (3.5) mostra que a classe $[f \circ \lambda] \in T_{f(p)}N$ depende apenas da classe $[\lambda]$, logo (3.4) está bem definido. Além disso, segue de (3.5) que o diagrama

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "\mathrm{d}f(p)"] \arrow[d, "\overline{\varphi}"'] & T_{f(p)}N \arrow[d, "\overline{\psi}"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "\mathrm{d}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd} \tag{3.6}$$

é comutativo, implicando que $\mathrm{d}f(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ é linear.

Dado uma carta local (U, φ) em M^n, com $p \in U$, denotemos por

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)\right\}$$

a base de T_pM induzida pelo isomorfismo $\overline{\varphi} : T_pM \to \mathbb{R}^n$. Ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = \overline{\varphi}^{-1}(e_i),$$

onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = [\lambda_i],$$

onde $\lambda_i = \varphi^{-1} \circ \alpha_i$ e $\alpha_i : I \to \varphi(U)$ é uma curva diferenciável tal que $\alpha_i(0) = \varphi(p)$ e $\alpha_i'(0) = e_i$, para todo $1 \leq i \leq n$.

Proposição 3.4.4. Dados uma aplicação diferenciável $f : M^m \to N^n$ e um ponto $p \in M$, considere cartas locais (U, φ) em M e (V, ψ) em N, com $p \in U$ e $f(U) \subset V$. Então, a matriz da diferencial $\mathrm{d}f(p)$, em relação às bases

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}(p)\right\} \quad \text{e} \quad \left\{\frac{\partial}{\partial y_1}(f(p)), \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}(f(p))\right\} \tag{3.7}$$

determinadas por φ e ψ, respectivamente, é a matriz jacobiana de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ no ponto $\varphi(p)$.

Demonstração. Denote por (a_{ij}) a matriz da diferencial $\mathrm{d}f(p)$ em relação às bases em (3.7). Da comutatividade do diagrama (3.6), temos:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j}(f(p)) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{d}f(p) \cdot \overline{\varphi}^{-1}(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{\psi}^{-1}(e_j) \\ &\Leftrightarrow \quad \overline{\psi}\left(\mathrm{d}f(p) \cdot \overline{\varphi}^{-1}(e_i)\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{d}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j, \end{aligned}$$

para todo $1 \leq i \leq m$, e isso finaliza a demonstração. $\square$

Teorema 3.4.5 (Regra da cadeia)**.** *Sejam M, N, P variedades diferenciáveis e $f : M \to N$, $g : N \to P$ aplicações diferenciáveis. Então, a composta $g \circ f$ também é diferenciável e, para todo $p \in M$, tem-se:*

$$\mathrm{d}(g \circ f)(p) = \mathrm{d}g(f(p)) \circ \mathrm{d}f(p). \tag{3.8}$$

Demonstração. A primeira afirmação é o conteúdo do Exercício 3.3.2. Para provar a igualdade (3.8), considere um vetor $[\lambda] \in T_pM$. Temos:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(g \circ f)(p) \cdot [\lambda] &= [g \circ f \circ \lambda] \\ &= [g \circ (f \circ \lambda)] \\ &= \mathrm{d}g(f(p)) \cdot [f \circ \lambda] \\ &= \mathrm{d}g(f(p)) \cdot \mathrm{d}f(p) \cdot [\lambda]. \end{aligned}$$

Como $[\lambda]$ é arbitrário, a demonstração está concluída. $\square$

Corolário 3.4.6. Se $f : M \to N$ é um difeomorfismo então, para todo $p \in M$, a diferencial $\mathrm{d}f(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ é um isomorfismo linear e

$$\mathrm{d}f(p)^{-1} = \mathrm{d}(f^{-1})(f(p)).$$

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 3.4.5 à igualdade $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$ no ponto $p \in M$ e à igualdade $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$ no ponto $f(p) \in N$. $\square$

Observação 3.4.7. Um espaço vetorial n-dimensional V é, em virtude do Exemplo 3.1.12, uma variedade diferenciável, e qualquer isomorfismo linear $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ é uma carta em V. Dado um vetor $p \in V$, afirmamos que o isomorfismo $\varphi^{-1} \circ \overline{\varphi} : T_pV \to V$ não depende de φ. De fato, dados outro isomorfismo $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ e um vetor $[\lambda] \in T_pV$, temos:

$$\begin{aligned} \overline{\psi}([\lambda]) &= (\psi \circ \lambda)'(0) \\ &= (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \lambda)'(0) \\ &= \mathrm{d}(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot \overline{\varphi}([\lambda]). \end{aligned}$$

Como $\psi \circ \varphi^{-1}$ é linear, tem-se $\mathrm{d}(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = \psi \circ \varphi^{-1}$. Isso implica que $\overline{\psi} = \psi \circ \varphi^{-1} \circ \overline{\varphi}$, mostrando que $\psi^{-1} \circ \overline{\psi} = \varphi^{-1} \circ \overline{\varphi}$. Essa observação permite-nos realizar a seguinte convenção: se V é um espaço vetorial n-dimensional então, para qualquer vetor $p \in V$, identificaremos o espaço tangente T_pV com o próprio espaço vetorial V através do isomorfismo

$$\varphi^{-1} \circ \overline{\varphi} : T_pV \to V,$$

onde $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo arbitrário. No caso particular em que $V = \mathbb{R}^n$, identificamos $T_p\mathbb{R}^n$ com $\mathbb{R}^n$, para qualquer $p \in \mathbb{R}^n$, através do isomorfismo $\overline{\mathrm{Id}} : T_p\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ induzido pela carta $(\mathbb{R}^n, \mathrm{Id})$ em $\mathbb{R}^n$.

Lema 3.4.8. Se W é um aberto de uma variedade diferenciável M^n então, para todo ponto $p \in W$, a diferencial da aplicação inclusão $i : W \to M$ é um isomorfismo linear de T_pW sobre T_pM.

Demonstração. Seja (U, φ) uma carta local em W. Como W é aberto em M, (U, φ) é também uma carta em M. A representação de i em relação às cartas φ e φ é a aplicação identidade do aberto $\varphi(U)$ de $\mathbb{R}^n$. Logo, $\mathrm{d}(\varphi \circ i \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ é a aplicação identidade de $\mathbb{R}^n$. Sejam $\overline{\varphi}^W$, $\overline{\varphi}^M$ os isomorfismos induzidos pela carta φ nas variedades W e M, respectivamente. Assim,

$$\mathrm{d}i(p) = (\overline{\varphi}^M)^{-1} \circ \mathrm{Id} \circ \overline{\varphi}^W = (\overline{\varphi}^M)^{-1} \circ \overline{\varphi}^W.$$

Como $\overline{\varphi}^W$ e $\overline{\varphi}^M$ são isomorfismos, segue que $\mathrm{d}i(p)$ também é um isomorfismo,

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & M \arrow[d, "\varphi"] \\ \varphi(U) \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & \varphi(U) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T_pW \arrow[r, "\mathrm{d}i(p)"] \arrow[d, "\overline{\varphi}^W"'] & T_{i(p)}M \arrow[d, "\overline{\varphi}^M"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

e isso finaliza a demonstração. $\square$

Observação 3.4.9. O Lema 3.4.8 permite-nos adotar a seguinte convenção: se W é um aberto de uma variedade diferenciável M, identificamos o espaço tangente T_pW com o espaço tangente T_pM, através do isomorfismo linear $\mathrm{d}i(p) : T_pW \to T_{i(p)}M$.

Em virtude da identificação acima, temos também o seguinte resultado sobre a diferencial da restrição de uma aplicação a um aberto.

Lema 3.4.10. Sejam M, N variedades diferenciáveis, $M_1 \subset M$ e $N_1 \subset N$ subconjuntos abertos e $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável tal que $f(M_1) \subset N_1$. Se $f_1 : M_1 \to N_1$ denota a restrição de f a M_1, então $\mathrm{d}f_1(p) = \mathrm{d}f(p)$, para todo $p \in M_1$.

Demonstração. Denotando por $i : M_1 \to M$ e $j : N_1 \to N$ as aplicações de inclusão, temos que $j \circ f_1 = f \circ i$. A conclusão segue então da regra da cadeia, observando que, em virtude da identificação acima, $\mathrm{d}i(p)$ é a aplicação identidade de T_pM e $\mathrm{d}j(f(p))$ é a aplicação identidade de $T_{f(p)}N$. $\square$

Lema 3.4.11. Se (U, φ) é uma carta local em uma variedade diferenciável M^n então, para todo ponto $p \in U$, a diferencial $\mathrm{d}\varphi(p)$ coincide com o isomorfismo induzido $\overline{\varphi}_p : T_pM \to \mathbb{R}^n$ definido em (3.2).

Demonstração. Para calcular a diferencial $\mathrm{d}\varphi(p)$ podemos, em virtude do Lema 3.4.10, considerar φ como uma aplicação com contradomínio $\mathbb{R}^n$, em vez de $\varphi(U)$. Em relação às cartas φ em U e Id em $\mathbb{R}^n$, a representação da aplicação φ é a aplicação de inclusão i do aberto $\varphi(U)$ em $\mathbb{R}^n$. Assim, $\mathrm{d}i(\varphi(p))$ é a aplicação identidade de $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\ \varphi(U) \arrow[r, "i"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T_pU \arrow[r, "\mathrm{d}\varphi(p)"] \arrow[d, "\overline{\varphi}^U"'] & T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n \arrow[d, "\overline{\mathrm{Id}}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

A diferencial de φ no ponto p é dada então por

$$\mathrm{d}\varphi(p) = \overline{\mathrm{Id}}^{-1} \circ \mathrm{Id} \circ \overline{\varphi}^U = \overline{\mathrm{Id}} \circ \overline{\varphi}^U.$$

Como identificamos $T_pU = T_pM$ e $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$, então $\overline{\varphi}^U = \overline{\varphi}$ e $\overline{\mathrm{Id}} = \mathrm{Id}$, logo $\mathrm{d}\varphi(p) = \overline{\varphi}_p$. $\square$

A partir de agora omitiremos a notação $\overline{\varphi}$ para o isomorfismo induzido pela carta φ. Em virtude do Lema 3.4.11, usaremos $\mathrm{d}\varphi(p)$ em vez de $\overline{\varphi}_p$.

Teorema 3.4.12 (Aplicação inversa)**.** *Sejam $f : M^m \to N^n$ uma aplicação diferenciável e $p \in M$ um ponto tal que $\mathrm{d}f(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ seja um isomorfismo. Então, existe um aberto $W \subset M$, com $p \in W$, tal que $f(W)$ é aberto em N e $f|_W : W \to f(W)$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. Sejam (U, φ), (V, ψ) cartas locais em M e N, respectivamente, com $p \in U$ e $f(U) \subset V$. A representação $\widetilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ de f é diferenciável e, em virtude da regra da cadeia, temos:

$$\mathrm{d}\widetilde{f}(\varphi(p)) = \mathrm{d}\psi(f(p)) \circ \mathrm{d}f(p) \circ \mathrm{d}\varphi(p)^{-1}.$$

Como $\mathrm{d}\psi(f(p))$ e $\mathrm{d}\varphi(p)$ são isomorfismos, segue que $\mathrm{d}\widetilde{f}(\varphi(p))$ é um isomorfismo de $\mathbb{R}^n$. Assim, pelo teorema da aplicação inversa em espaços Euclidianos, existe um aberto $\widetilde{W} \subset \mathbb{R}^m$, com $\varphi(p) \in \widetilde{W} \subset \varphi(U)$, tal que $\widetilde{f}(\widetilde{W}) \subset \psi(V)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e $\widetilde{f}|_{\widetilde{W}} : \widetilde{W} \to \widetilde{f}(\widetilde{W})$ é um difeomorfismo. Tome $W = \varphi^{-1}(\widetilde{W})$. Segue então que W é aberto em M, $p \in W$, $f(W) = \psi^{-1}\left(\widetilde{f}(\widetilde{W})\right)$ é aberto em N e $f|_W : W \to f(W)$ é um difeomorfismo, pois

$$f|_W = \left(\psi^{-1}|_{\widetilde{f}(\widetilde{W})}\right) \circ \left(\widetilde{f}|_{\widetilde{W}}\right) \circ (\varphi|_W)$$

é uma composição de difeomorfismos. □

Como consequência direta do Teorema 3.4.12, temos o seguinte

Corolário 3.4.13. Se $f : M \to N$ é uma aplicação diferenciável tal que $\mathrm{d}f(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ é um isomorfismo linear, para todo $p \in M$, então f é um difeomorfismo local. Em particular, se f é injetora, então f é um difeomorfismo sobre $f(M)$, que é um aberto de N.

Corolário 3.4.14. Para qualquer aplicação diferenciável $f : M \to N$, o conjunto $\mathcal{C}$ dos pontos $p \in M$, para os quais $\mathrm{d}f(p)$ é um isomorfismo linear, é aberto em M.

Demonstração. Fixe um ponto arbitrário $p \in \mathcal{C}$. Se W é uma vizinhança aberta em torno de p, dada pelo Teorema 3.4.12, então $\mathrm{d}f(q)$ é um isomorfismo linear, para todo $q \in W$. Disso decorre, em particular, que $W \subset \mathcal{C}$, provando que $\mathcal{C}$ é aberto. □

3.5 Exercícios

3.1

1. Considere dois atlas $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ num conjunto M.

(a) Prove que $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ é um atlas em M se, e somente se, todo elemento $\varphi \in \mathcal{A}_1$ é compatível com $\mathcal{A}_2$.

(b) Prove que $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ é um atlas em M se, e somente se, $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ estão contidos no mesmo atlas maximal em M.

(c) Se $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ é um atlas em M, prove que as topologias induzidas em M por $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ coincidem.

2. Dado um atlas maximal $\mathcal{A}$ de dimensão n num conjunto M, fixe um elemento $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$. Se W é um aberto de $\mathbb{R}^n$, com $W \subset \varphi(U)$, e se $V = \varphi^{-1}(W)$, prove que a restrição $\varphi|_V : V \to W$ também pertence a $\mathcal{A}$.

3. Seja $M = \mathbb{R}$ e considere o atlas maximal $\mathcal{A}$ em M que contém a carta global $\varphi : M \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) = x^3$. Prove que:

(a) A topologia induzida por $\mathcal{A}$ em M coincide com a topologia usual de $\mathbb{R}$. Em particular, essa topologia é Hausdorff e satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade, logo $(M, \mathcal{A})$ é uma variedade diferenciável.

(b) A estrutura diferenciável $\mathcal{A}$ em M é diferente da estrutura diferenciável usual em $\mathbb{R}$.

3.2

1 (Topologia quociente)**.** Dados um espaço topológixo X e uma relação de equivalência $\sim$ em X, denotemos por $X/\sim$ o espaço quociente. Assim, os elementos de $X/\sim$ são as classes de equivalências

$$[x] = \{y \in X : x \sim y\}.$$

A *topologia quociente* em $X/\sim$ é a topologia τ que torna a aplicação quociente $\pi : X \to X/\sim$ contínua. Mais precisamente, um subconjunto $U \subset X/\sim$ é aberto se $\pi^{-1}(U)$ é aberto em X. Uma relação de equivalência $\sim$ em X é dita ser *aberta* se, para todo aberto $A \subset X$, o subconjunto $[A]$ é aberto em $X/\sim$, onde $[A] = \bigcup_{a \in A} [a]$.

(a) Prove que uma relação de equivalência $\sim$ em X é aberta se, e somente se, π é uma aplicação aberta. Quando $\sim$ é aberta e X tem uma base enumerável de abertos, então $X/\sim$ também tem base enumerável.

(b) Seja $\sim$ uma relação de equivalência aberta em X. Então, o conjunto

$$R = \{(x, y) \in X \times X : x \sim y\}$$

é um subconjunto fechado de $X \times X$ se, e somente se, $X/\sim$ é Hausdorff.

2. Mostre que o espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$ é compacto.

3.3

1. Prove que toda aplicação diferenciável $f : M^m \to N^n$ é contínua.

2. Se $f : M \to N$ e $g : N \to P$ são aplicações diferenciáveis, prove que a composta $g \circ f : M \to N$ também é diferenciável.

3. Sejam M^m, N^n variedades diferenciáveis. Mostre que se existe um difeomorfismo local $f : M^m \to N^n$, então $m = n$.

4. Sejam M, N variedades diferenciáveis e $f : M \to N$ uma aplicação arbitrária. Mostre que f é diferenciável se, e somente se, $g \circ f : M \to \mathbb{R}$ é diferenciável, para toda função diferenciável $g : N \to \mathbb{R}$.

5. Considere duas variedades diferenciáveis M e N, e seja $f : M \to N$ uma aplicação. Prove que:

(a) Se V é um aberto em N tal que $f(M) \subset V$, então $f : M \to N$ é diferenciável se, e somente se, $f : M \to V$ é diferenciável.

(b) A aplicação identidade $\mathrm{Id} : M \to M$ é diferenciável. Mais geralmente, se U é um aberto de M então a aplicação inclusão $i : U \to M$ é diferenciável.

(c) Se $f : M \to N$ é diferenciável então, para todo aberto $U \subset M$, a restrição $f|_U : U \to N$ é diferenciável.

6. Dados duas variedades diferenciáveis M_1 e M_2, seja $M = M_1 \times M_2$ seu produto cartesiano. Prove que existe um único atlas maximal $\mathcal{A}$ em M tal que $(M, \mathcal{A})$ é uma variedade diferenciável com as seguintes propriedades:

(a) As projeções $\pi_i : M \to M_i$ são aplicações diferenciáveis, $i = 1, 2$.

(b) Se N é uma variedade diferenciável, então uma aplicação $f : N \to M$ é diferenciável se, e somente se, as coordenadas $\pi_i \circ f : N \to M_i$ são diferenciáveis, $i = 1, 2$.

(c) A topologia induzida em M por $\mathcal{A}$ coincide com a topologia produto.

(d) $\dim(M) = \dim(M_1) + \dim(M_2)$.

7. Seja M^n uma variedade diferenciável compacta. Prove que não existe um difeomorfismo local $f : M^n \to \mathbb{R}^n$.

8. Considere dois conjuntos M e N, uma aplicação bijetora $f : M \to N$ e $\mathcal{B}$ um atlas maximal em N. Prove que existe um único atlas maximal $\mathcal{A}$ em M tal que $f : (M, \mathcal{A}) \to (N, \mathcal{B})$ seja um difeomorfismo.

9. Sejam M, N espaços topológicos e $\pi : M \to N$ uma aplicação. Lembremos que π é dita ser uma *aplicação de recobrimento* se para todo $q \in N$ existe uma vizinhança aberta V de q em N e uma família $\{U_i : i \in I\}$ de abertos dois a dois disjuntos em M tal que

$$\pi^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$$

e tal que $\pi|_{U_i} : U_i \to V$ é um homeomorfismo, para todo $i \in I$. Disso decorre que toda aplicação de recobrimento π é um homeomorfismo local; em particular, π é contínua e aberta.

(a) Seja $\pi : M \to N$ um aplicação de recobrimento, onde N é uma variedade diferenciável. Prove que existe uma estrutura de variedade diferenciável em M tal que a projeção π é uma aplicação de recobrimento diferenciável.

(b) Prove que toda aplicação de recobrimento diferenciável $\pi : M \to N$ é um difeomorfismo local. Além disso, se π é injetora, então π é um difeomorfismo.

10. Dado uma variedade diferenciável $(M^n, \mathcal{A})$, considere um homeomorfismo $\phi : M \to M$ que não seja um difeomorfismo, e defina

$$\mathcal{B} = \{\varphi \circ \phi : \varphi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n : \ (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}.$$

Prove que $\mathcal{B}$ é um atlas maximal em M, distinto de $\mathcal{A}$, e $\phi : (M, \mathcal{B}) \to (M, \mathcal{A})$ é um difeomorfismo.

3.4

1. Dado uma variedade diferenciável M, prove que a diferencial da identidade $\mathrm{Id} : M \to M$, em qualquer ponto $p \in M$, é a aplicação identidade em T_pM.

2. Se $f : M \to N$ é uma aplicação constante, prove que f é diferenciável e que $\mathrm{d}f(p) = 0$, para todo $p \in M$.

3. Seja $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Se M é conexa e $\mathrm{d}f(p) = 0$, para todo $p \in M$, prove que f é constante.

4. Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Prove que se $p \in M$ é um ponto de máximo ou de mínimo local de f, então p é um ponto crítico de f.

5. Se M é uma variedade diferenciável compacta, prove que toda função $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciável tem, pelo menos, dois pontos críticos.

6. Se M^n é uma variedade diferenciável compacta, prove que toda aplicação diferenciável $f : M \to \mathbb{R}^n$ tem, pelo menos, um ponto crítico, i.e., existe pelo menos um ponto $p \in M$ tal que $\mathrm{d}f(p)$ não é sobrejetora.

7. Dados duas variedades diferenciáveis M_1 e M_2, seja $M = M_1 \times M_2$ seu produto cartesiano munido da estrutura diferenciável produto.

(a) Mostre que, para todo $p = (p_1, p_2) \in M$, a aplicação

$$v \in T_pM \mapsto \big(\mathrm{d}\pi_1(p) \cdot v, \mathrm{d}\pi_2(p) \cdot v\big) \in T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$$

é um isomorfismo linear entre T_pM e a soma direta $T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$.

(b) Dados uma variedade diferenciável N e uma aplicação diferenciável $f : N \to M$, com $f = (f_1, f_2)$, mostre que

$$\mathrm{d}f(x) \cdot v = \big(\mathrm{d}f_1(x) \cdot v, \mathrm{d}f_2(x) \cdot v\big),$$

para quaisquer $x \in N$ e $v \in T_xN$.

(c) Fixado um ponto $p = (p_1, p_2) \in M$, defina uma aplicação $i_1 : M_1 \to M$ pondo $i_1(x_1) = (x_1, p_2)$, para todo $x_1 \in M_1$. Mostre que i_1 é uma aplicação diferenciável e sua diferencial no ponto $x_1 \in M_1$ é a inclusão de $T_{x_1}M_1$ na soma direta $T_{x_1}M_1 \oplus T_{x_2}M_2$, ou seja,

$$\mathrm{d}i_1(x_1) \cdot v_1 = (v_1, 0),$$

para todo $v_1 \in T_{x_1}M_1$. De forma análoga podemos definir uma aplicação $i_2 : M_2 \to M$ pondo $i_2(x_2) = (p_1, x_2)$, para todo $x_2 \in M_2$.

3.6 Apêndice: Fatos básicos de topologia

Um espaço topológico X é dito *Hausdorff* se para quaisquer dois pontos distintos $p, q \in X$, existem abertos disjuntos $U, V \subset X$, com $p \in U$ e $q \in V$.

Lema 3.6.1. Para qualquer espaço de Hausdorff X, valem as seguintes propriedades:

(a) Dados um ponto $p \in X$ e um compacto $K \subset X$, com $p \notin K$, existem abertos disjuntos $U, V \subset X$ tais que $p \in U$ e $K \subset V$.

(b) Todo subconjunto compacto de X é fechado.

(c) Dados dois compactos disjuntos $K, L \subset X$, existem abertos disjuntos $U, V \subset X$ tais que $K \subset U$ e $L \subset V$.

Um espaço topológico X é dito *regular* se, para qualquer ponto $p \in X$ e qualquer subconjunto fechado $F \subset X$, com $p \notin F$, existem abertos disjuntos $U, V \subset X$ tais que $p \in U$ e $F \subset V$.

Lema 3.6.2. Um espaço topológico X é regular se, e somente se, todo ponto de X possui um sistema fundamental de vizinhanças fechadas, i.e., se, e somente se, para todo ponto $p \in X$ e todo aberto $U \subset X$, com $p \in U$, existe um fechado $F \subset X$ tal que $p \in int(F) \subset F \subset U$.

Um espaço topológico X é dito *localmente compacto* se para todo ponto $p \in X$ e todo aberto $U \subset X$, com $p \in U$, existe um compacto $K \subset X$ com $p \in int(K) \subset K \subset U$.

Lema 3.6.3. Seja X um espaço de Hausdorff e suponha que todo ponto de X possui uma vizinhança compacta, i.e., todo ponto de X pertence ao interior de um subconjunto compacto de X. Então, X é regular e localmente compacto.

Um espaço topológico X é dito *normal* se para quaisquer fechados e disjuntos $F, G \subset X$, existem abertos disjuntos $U, V \subset X$ tais que $F \subset U$ e $G \subset V$.

Lema 3.6.4. Seja X um espaço de Hausdorff.

(a) Se X é localmente compacto, então X é regular.

(b) Se X é compacto, então X é normal.

Proposição 3.6.5. Toda variedade diferenciável é localmente compacta e regular.

Dizemos que um espaço topológico X satisfaz o *segundo axioma da enumerabilidade* se possui uma base enumerável de abertos. Recorde que uma base de abertos para X é uma coleção de abertos de modo que todo aberto de X pode ser expresso como união de abertos dessa coleção.

Lema 3.6.6. Todo espaço topológico regular que satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade é normal.

Proposição 3.6.7. Toda variedade diferenciável é normal.

Uma *exaustão por compactos* para um espaço topológico X é uma sequência $(K_n)_{n\geq 1}$ de subconjuntos compactos de X tal que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \quad \text{e} \quad K_n \subset \operatorname{int}(K_{n+1}),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Lema 3.6.8. Todo espaço localmente compacto e que satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade admite uma exaustão por compactos.

Seja $\mathcal{C} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ uma família de subconjuntos de um espaço topológico X. Dizemos que $\mathcal{C}$ é *localmente finita* em X se cada ponto $p \in X$ possui uma vizinhança que intercepta U_α para no máximo um número finito de índices $\alpha \in I$. Ou seja, para todo ponto $p \in X$, existe um aberto $U \subset X$, com $p \in U$, tal que o conjunto

$$\{\alpha \in I : U \cap U_\alpha \neq \emptyset\}$$

é finito.

Lema 3.6.9. Se $\mathcal{C} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ é uma família localmente finita em X, então $\{\overline{U_\alpha} : \alpha \in I\}$ também é localmente finito em X.

Uma cobertura $\{V_i : i \in I\}$ para um espaço topológico X é dita um *refinamento* de uma cobertura $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ de X se, para todo $i \in I$, existe $\alpha \in J$ tal que $V_i \subset U_\alpha$. Um espaço topológico X é dito *paracompacto* se toda cobertura aberta de X admite um refinamento aberto localmente finito.

Proposição 3.6.10. Toda variedade diferenciável é paracompacto.

Proposição 3.6.11. Sejam M um conjunto, $\mathcal{A}$ um atlas em M e assuma que M está munido da topologia $\tau_{\mathcal{A}}$. Se o espaço topológico M é Hausdorff, conexo e paracompacto, então M satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade. Em particular, o conjunto M munido do atlas maximal que contém $\mathcal{A}$ é uma variedade diferenciável.

Lema 3.6.12. As seguintes afirmações a respeito de um espaço topológico de Hausdorff são equivalentes:

(a) Toda cobertura aberta de X admite partição da unidade subordinada.

(b) X é paracompacto.

Proposição 3.6.13. Em qualquer variedade diferenciável $(M^n, \mathcal{A})$, valem as seguintes propriedades a respeito da topologia induzida:

(a) Existe um atlas enumerável $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$.

(b) A topologia $\tau_{\mathcal{A}}$ é metrizável.

(c) $(M, \tau_{\mathcal{A}})$ é localmente compacto e localmente conexo.

(d) $(M, \tau_{\mathcal{A}})$ é conexo se, e somente se, é conexo por caminhos.

Capítulo 4

Subvariedades

Em analogia às funções reais de uma variável real, onde a reta tangente fornece a melhor aproximação linear para a função numa vizinhança do ponto, é natural esperar que a diferencial de uma aplicação diferenciável entre variedades também forneça a melhor aproximação linear para a aplicação numa vizinhança do ponto em questão. A propriedade fundamental da diferencial, como veremos, é o seu posto, e várias propriedades geométricas podem ser obtidas a partir do estudo da diferencial.

As aplicações diferenciáveis para as quais a diferencial traduz propriedades interessantes são aquelas de posto constante. Essencialmente, existem três classes de tais aplicações: as imersões, as submersões e os mergulhos. As imersões são os objetos essenciais na teoria de subvariedades, enquanto que as submersões desempenham papel fundamental em certos modelos de geometria e topologia.

O objetivo deste capítulo é o estudo de algumas propriedades de certas variedades diferenciáveis que surgem naturalmente como subconjuntos de outras variedades, as chamadas subvariedades. Intuitivamente, uma subvariedade tem a mesma natureza de uma subvariedade Euclidiana em relação ao seu ambiente Euclidiano. O ponto de partida é a discussão de alguns teoremas clássicos, conhecidos como formas locais das imersões e submersões, que serão fundamentais neste primeiro estudo das subvariedades.

O estudo de subvariedades é um universo vasto, que pode convergir para várias direções e culminar para certos tópicos de pesquisa como as imersões isométricas, por exemplo, onde as variedades em questão admitem algumas estruturas adicionais. O que faremos aqui é um primeiro estudo sobre subvariedades. O leitor interessado em se aprofundar mais sobre o assunto pode consultar, por exemplo, o excelente livro do J. Lee [10].

4.1 Aplicações de posto constante

O posto de uma aplicação linear, entre espaços vetoriais de dimensão finita, é definido como a dimensão de sua imagem. O teorema clássico da Álgebra Linear, conhecido como *forma canônica de uma aplicação linear*, estabelece que, a menos da escolha das bases, uma aplicação linear é completamente determinada pelo seu posto e as dimensões do seu domínio e contradomínio. Ou seja, toda aplicação linear pode ser prepresentada, matricialmente, numa forma diagonal através de escolhas apropriadas de bases para o domínio e o contradomínio.

Considere agora duas variedades diferenciáveis M^m e N^n. Dados uma aplicação diferenciável $f : M \to N$ e um ponto $p \in M$, definimos o *posto* de f em p, denotado por $\mathrm{rank} f(p)$, como sendo o posto da diferencial $\mathrm{d}f(p)$, i.e., a dimensão da imagem da aplicação linear $\mathrm{d}f(p)$. Disso decorre que o posto de f não pode ser maior do que m nem maior do que n. Quando f tem o mesmo posto em todos os pontos, diremos que f é uma *aplicação de posto constante*. Nas seções seguintes veremos exemplos de aplicações diferenciáveis de posto máximo.

Se $f : M^m \to N^n$ é uma aplicação diferenciável, então o posto de f é uma função semicontínua inferiormente. Ou seja, se f tem posto r num ponto $p \in M$, existe uma vizinhança U de p em M tal que o posto de f é maior ou igual a r em U. De fato, existe uma submatriz $r \times r$ da matriz $\mathrm{d}f(p)$, cujo determinante é diferente de 0. Por continuidade, este mesmo determinante é não-nulo em todos os pontos de uma vizinhança U de p. Nestes pontos, o posto de f é, portanto, pelo menos igual a r.

O resultado seguinte é a versão para variedades do clássico teorema do posto para aplicações entre espaços Euclidianos.

Teorema 4.1.1 (Teorema do posto)**.** *Seja $f : M^m \to N^n$ uma aplicação diferenciável que tenha posto igual a $r \leq \min\{m, n\}$ em todos os pontos de M. Então, dado um ponto $p \in M$, existem cartas locais (U, φ) em M e (V, ψ) em N, com $p \in U$ e $f(U) \subset V$, tais que*

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = (x_r, 0) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r},$$

para todo $x = (x_r, x_{m-r}) \in \varphi(U)$.

Demonstração. Sejam (U_1, φ_1), (V_1, ψ_1) cartas locais em M e N, respectivamente, com $p \in U_1$ e $f(U_1) \subset V_1$. Disso decorre que a representação $\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ de f tem posto r em todos os pontos do aberto $\varphi_1(U_1)$. Pelo teorema do posto em espaços Euclidianos, existem abertos $W, W' \subset \mathbb{R}^m$, $Z, Z' \subset \mathbb{R}^n$ e difeomorfismos $\alpha : W \to W'$, $\beta : Z \to Z'$, com $\varphi_1(p) \in W \subset \varphi_1(U_1)$ e $(\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1})(W) \subset Z$, tais que

$$\left(\beta \circ (\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}) \circ \alpha^{-1}\right)(x) = (x_r, 0) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r},$$

para todo $x \in W'$. Para completar a prova, basta tomar $U = \varphi_1^{-1}(W)$, $\varphi = \alpha \circ \varphi_1|_U$, $V = \psi_1^{-1}(\psi_1(V_1) \cap Z)$, $\psi = \beta \circ \psi_1|_V$ e observar que

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = \left(\beta \circ (\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}) \circ \alpha^{-1}\right)(x),$$

para todo $x \in W' = \varphi(U)$. $\square$

Proposição 4.1.2. Dado uma aplicação diferenciável $f : M^m \to N^n$, para cada $r = 0, 1, \ldots, s$, com $s = \min\{m, n\}$, denotemos por A_r o interior do subconjunto de M no qual f tem posto igual a r. Então, o conjunto

$$A = A_0 \cup \ldots \cup A_s$$

é aberto e denso em M.

Demonstração. Dado um aberto $V \subset M$, denotemos por s o valor máximo do posto de f em V. Como

$$p \mapsto \text{rank} f(p)$$

é uma função semicontínua inferiormente, se $p \in V$ é tal que $\text{rank} f(p) = s$, então existe um aberto $U \subset V$ contendo p tal que $\text{rank} f(q) = s$, para todo $q \in U$. Assim, $U \subset V \cap A_s \subset V \cap A$, logo A é denso em M. $\square$

4.2 Imersões

Uma aplicação diferenciável $f : M^m \to N^n$ é dita ser uma *imersão no ponto* $p \in M$ se a diferencial $\mathrm{d}f(p) : T_pM \to T_{f(p)}M$ é uma aplicação linear injetora. Neste caso, deve-se ter $m \leq n$. Se f for uma imersão em todos os pontos de M, diremos simplesmente que f é uma *imersão*.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 4.2.1. Um exemplo simples de imersão é a aplicação inclusão $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ dada por

$$f(p) = (p, 0),$$

para todo $p \in \mathbb{R}^m$. Como f é linear, f é diferenciável e tem-se $\mathrm{d}f(p) = f$, para todo $p \in \mathbb{R}^m$ e, sendo f injetora, segue que f é uma imersão.

Exemplo 4.2.2. Um exemplo de imersão que não é injetora é a curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (t^3 - t, t^2),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Tem-se $\alpha'(t) \neq (0,0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e $\alpha(1) = \alpha(-1)$. Um exemplo de uma aplicação diferenciável, injetora, que não é imersão é a *ciclóide* $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\beta(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Observe que $\beta'(t) = (0,0)$, para todo $t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

O teorema seguinte mostra que toda imersão pode ser descrita, localmente, como a inclusão do Exemplo 4.2.1.

Teorema 4.2.3 (Forma local das imersões)**.** *Seja $f : M^m \to N^n$ uma aplicação diferenciável que é uma imersão num ponto $p \in M$. Então, existem uma carta local (U, φ) em M, com $p \in U$, e um difeomorfismo $\xi : V \to \varphi(U) \times W$, onde $V \subset N$ é um aberto contendo $f(U)$ e $W \subset \mathbb{R}^{n-m}$ é um aberto contendo $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$, tais que*

$$(\xi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = (x, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m},$$

para todo $x \in \varphi(U)$.

Demonstração. Sejam (U, φ), (V, ψ) cartas locais em M e N, respectivamente, com $p \in U$ e $f(U) \subset V$. Como $\mathrm{d}f(p)$ é injetora, segue da Proposição 3.4.4 que $\mathrm{d}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ também é injetora. Pela forma local das imersões em espaços Euclidianos, restringindo os domínios, se necessário, existe um difeomorfismo $\eta : \psi(V) \to \varphi(U) \times W$, onde $W \subset \mathbb{R}^{n-m}$ é um aberto contendo $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$, tal que

$$\eta \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) : \varphi(U) \to \varphi(U) \times W$$

é a aplicação de inclusão, i.e.,

$$[\eta \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})](x) = (x, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m},$$

para todo $x \in \varphi(U)$. Agora, basta definir $\xi = \eta \circ \psi$. □

Vejamos algumas consequências.

Corolário 4.2.4. Seja $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Então, o conjunto dos pontos $p \in M$ tais que f é uma imersão em p é aberto em M.

Demonstração. Com a notação do enunciado do Teorema 4.2.3, temos que se f é imersão em $p \in U$ então f é imersão em q, para todo $q \in U$, pois $\xi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é imersão em $\varphi(q)$, e as aplicações φ e ξ são difeomorfismos. $\square$

Corolário 4.2.5. Seja $f : M \to N$ uma imersão. Então, uma aplicação $g : P \to M$ é diferenciável se, e somente se, g é contínua e a composta $f \circ g$ é diferenciável.

Demonstração. Suponhamos g contínua e $f \circ g$ é diferenciável. Dado um ponto $p \in P$, segue do Teorema 4.2.3 que existem uma carta local (U, φ) em M, com $g(p) \in U$, e um difeomorfismo $\xi : V \to \xi(V)$, com $f(U) \subset V$, tais que $\xi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é dada por

$$(\xi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = (x, 0),$$

para todo $x \in \varphi(U)$. Como g é contínua, existe um aberto $W \subset P$ contendo p tal que $g(W) \subset U$. Além disso, sendo $f \circ g$ diferenciável, para toda carta local (Z, ψ) em P, com $p \in Z \subset W$, tem-se que $\xi \circ (f \circ g) \circ \psi^{-1} : \psi(Z) \to \xi(V)$ é diferenciável. No entanto, como

$$\begin{aligned} \left(\xi \circ (f \circ g) \circ \psi^{-1}\right)(x) &= (\xi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ g \circ \psi^{-1})(x) \\ &= \left((\varphi \circ g \circ \psi^{-1})(x), 0\right), \end{aligned}$$

segue que $\varphi \circ g \circ \psi^{-1}$ é diferenciável, logo g é diferenciável. A recíproca segue diretamente da regra da cadeia. $\square$

Uma aplicação diferenciável $f : M \to N$ é dita ser um *mergulho* se f é uma imersão e a aplicação $f : M \to f(M)$ é um homeomorfismo, onde $f(M)$ está munido da topologia induzida de N. Nem toda imersão injetora é um mergulho (cf. Exercício 4.2.1). No entanto, temos um resultado local.

Proposição 4.2.6. Toda imersão $f : M^m \to N^n$ é, localmente, um mergulho. Mais precisamente, todo ponto $p \in M$ possui uma vizinhança aberta $U \subset M$ tal que $f|_U : U \to N$ é um mergulho.

Demonstração. Basta observar que a inclusão

$$\mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m} \to \mathbb{R}^n,$$

assim como qualquer restrição dessa inclusão a abertos de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, é um mergulho e que, pelo Teorema 4.2.3, toda imersão é localmente representada em cartas apropriadas por uma inclusão como essa. $\square$

4.3 Submersões

Uma aplicação diferenciável $f : M^m \to N^n$ é dita ser uma *submersão no ponto* $p \in M$ se a diferencial $\mathrm{d}f(p) : T_pM \to T_{f(p)}M$ é uma aplicação linear sobrejetora. Neste caso, deve-se ter $m \geq n$. Se f for uma submersão em todos os pontos de M, diremos simplesmente que f é uma *submersão*.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 4.3.1. Uma função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$ é uma submersão em $p \in M$ se, e somente se, $\mathrm{d}f(p) \neq 0$. De fato, isso segue do fato de que um funcional linear é sobrejetor ou nulo.

Exemplo 4.3.2. Dado uma decomposição de $\mathbb{R}^{m+n}$ em soma direta da forma $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n$, seja $\pi : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$ a projeção sobre o primeiro fator, i.e., $\pi(x, y) = x$. Como π é linear, tem-se $\mathrm{d}\pi(x, y) = \pi$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^{m+n}$. Sendo π sobrejetora, concluímos que é uma submersão.

O teorema seguinte mostra que o Exemplo 4.3.2 é, em cartas locais apropriadas, o caso mais geral de uma submersão.

Teorema 4.3.3 (Forma local das submersões)**.** *Seja $f : M^m \to N^n$ uma aplicação diferenciável que é uma submersão num ponto $p \in M$. Então, dado uma carta local (V, ψ) em N, com $f(p) \in V$, existe um difeomorfismo $\xi : U \to \psi(V) \times W$, onde $U \subset M$ é um aberto contendo p, com $f(U) \subset V$, e $W \subset \mathbb{R}^{m-n}$ é um aberto, tais que*

$$(\psi \circ f \circ \xi^{-1})(x, y) = x,$$

para todo $(x, y) \in \psi(V) \times W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$.

Demonstração. Sejam (U, φ), (V, ψ) cartas locais em M e N, respectivamente, com $p \in U$ e $f(U) \subset V$. Como $\mathrm{d}f(p)$ é sobrejetora, segue da Proposição 3.4.4 que $\mathrm{d}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ também o é. Assim, pela forma local das submersões em espaços Euclidianos, restringindo os domínios, se necessário, existe um difeomorfismo $\eta : \varphi(U) \to \psi(V) \times W$, onde $W \subset \mathbb{R}^{m-n}$ é um aberto, tal que $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \eta^{-1} : \psi(V) \times W \to \psi(V)$ é a aplicação projeção sobre o primeiro fator, i.e.,

$$\left((\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \eta^{-1}\right)(x, y) = x,$$

para todo $(x, y) \in \psi(V) \times W$. Assim, basta considerar $\xi = \eta \circ \varphi$. $\square$

Vejamos algumas aplicações da forma local das submersões.

Corolário 4.3.4. Se $f : M \to N$ é uma aplicação diferenciável, então o conjunto dos pontos $p \in M$ tais que f é submersão em p é aberto em M.

Demonstração. Com a notação do enunciado do Teorema 4.3.3, temos que se f é submersão em $p \in U$ então f é uma submersão em q, para todo $q \in U$, pois $\psi \circ f \circ \xi^{-1}$ é submersão em $\xi(q)$, e as aplicações ξ e ψ são difeomorfismos. $\square$

Corolário 4.3.5. Seja $\pi : M \to N$ uma submersão sobrejetora. Então, uma aplicação $f : N \to P$ é diferenciável se, e somente se, $f \circ \pi$ é diferenciável.

Demonstração. Suponhamos que a composta $f \circ \pi$ seja diferenciável. Dado um ponto $q \in N$, seja $p \in M$ tal que $\pi(p) = q$. Como π é uma submersão, segue do Teorema 4.3.3 que existem uma carta local (V, ψ) em N e um difeomorfismo $\xi : U \to \psi(V) \times W$, com $\pi(U) \subset V$, tais que

$$(\psi \circ \pi \circ \xi^{-1})(x, y) = x,$$

para todo $(x, y) \in \psi(V) \times W$. Além disso, como $f \circ \pi$ é diferenciável, dado uma carta local (Z, φ) em P, com $f(q) \in Z$, restringindo U e V, se necessário, temos que $f(V) \subset Z$ e

$$\varphi \circ (f \circ \pi) \circ \xi^{-1} : \psi(V) \times W \to \psi(Z)$$

é diferenciável. No entanto, como

$$\begin{aligned}\left(\varphi \circ (f \circ \pi) \circ \xi^{-1}\right)(x, y) &= (\varphi \circ f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \pi \circ \xi^{-1})(x, y) \\ &= (\varphi \circ f \circ \psi^{-1})(x),\end{aligned}$$

segue que $\varphi \circ f \circ \psi^{-1}$ é diferenciável, logo f é diferenciável. A recíproca segue diretamente da regra da cadeia. $\square$

4.4 Subvariedades

Nesta seção introduziremos o conceito de subvariedade. Em linhas gerais, uma subvariedade m-dimensional de uma variedade diferenciável N^n é um subconjunto M de N tal que, em cartas locais apropriadas, a inclusão de M em N é representada pela inclusão de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$,

$$(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mapsto (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m},$$

ou seja, a relação entre $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ serve como um modelo para a relação existente entre uma subvariedade e uma variedade.

Definição 4.4.1. Seja N^n uma variedade diferenciável. Dizemos que um subconjunto $M \subset N$ é uma *subvariedade* m-dimensional de N se para todo ponto $p \in M$, existe uma carta local (U, φ) em N, com $p \in U$, tal que

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^m. \tag{4.1}$$

Os exemplos mais simples de subvariedades são as subvariedades Euclidianas. De fato, decorre do Teorema 2.2.7 que toda subvariedade Euclidiana M^m em $\mathbb{R}^n$ é uma subvariedade no sentido da Definição 4.4.1.

É de se esperar que uma subvariedade M^m de uma variedade diferenciável N^n também tenha uma estrutura diferenciável. De fato, dado um ponto $p \in M$, considere uma carta (U, φ) em N, com $p \in U$, satisfazendo (4.1). Definimos uma aplicação

$$\overline{\varphi} : M \cap U \to \varphi(U) \cap \mathbb{R}^m \tag{4.2}$$

pondo $\overline{\varphi} = \varphi|_{M \cap U}$. Com a notação acima, temos o seguinte

Teorema 4.4.2. *O conjunto $\mathcal{A}$ formado por todas as aplicações $\overline{\varphi}$, dadas em* (4.2)*, é um atlas em M, cuja topologia induzida em M coincide com a topologia induzida pela variedade N. Além disso, a aplicação inclusão $i : M \to N$ é um mergulho.*

Demonstração. Observe inicialmente que $\overline{\varphi}$ é bijetora e seu contra-domínio $\varphi(U) \cap \mathbb{R}^m$ é aberto em $\mathbb{R}^m$, logo $(U \cap M, \overline{\varphi})$ é uma carta local em M. Se (U, φ), (V, ψ) são cartas em N, com $p \in U \cap V$, satisfazendo (4.1), então os conjuntos

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}\left((U \cap M) \cap (V \cap M)\right) &= \varphi\left((U \cap V) \cap (V \cap M)\right) \\ &= \varphi(U \cap V) \cap \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \overline{\psi}\left((U \cap M) \cap (V \cap M)\right) &= \psi\left((U \cap V) \cap (U \cap M)\right) \\ &= \psi(U \cap V) \cap \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

são abertos em $\mathbb{R}^m$, pois $\varphi(U \cap V)$ e $\psi(U \cap V)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$. Além disso, a aplicação de transição

$$\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}^{-1} : \varphi(U \cap V) \cap \mathbb{R}^m \to \psi(U \cap V) \cap \mathbb{R}^m$$

é uma restrição da aplicação de transição $\psi \circ \varphi^{-1}$ e é, portanto, um difeomorfismo. Portanto, o conjunto $\mathcal{A}$, formado por todas tais aplicações $\overline{\varphi}$, é um atlas em M. Afirmamos que a topologia $\tau_{\mathcal{A}}$, induzida em M pelo atlas $\mathcal{A}$, coincide com a topologia τ, induzida em M pela variedade N. De fato, dado uma carta (U, φ) em N, satisfazendo (4.1) então, relativamente a τ, o conjunto $U \cap M$ é aberto em M e a carta $\overline{\varphi}$ é um homeomorfismo, pois é restrição de um homeomorfismo. Logo a topologia τ faz com que os elementos de $\mathcal{A}$ sejam homeomorfismos definidos em abertos de M, o que mostra que as topologias τ e $\tau_{\mathcal{A}}$ coincidem. Em relação à aplicação inclusão $i : M \to N$, se (U, φ) é uma carta em N satisfazendo (4.1), temos que $i(U \cap M) \subset U$ e a representação $\widetilde{i} : \varphi(U) \cap \mathbb{R}^m \to \varphi(U)$ de i em relação às cartas $\overline{\varphi}$ e φ é a inclusão do aberto $\varphi(U) \cap \mathbb{R}^m$ de $\mathbb{R}^m$ no aberto $\varphi(U)$ de $\mathbb{R}^n$. Logo, $\widetilde{i}$ é uma imersão e, portanto,

$$i|_{U \cap M} = \varphi^{-1} \circ \widetilde{i} \circ \overline{\varphi}$$

é uma imersão, já que $\overline{\varphi}$ e φ são difeomorfismos. Como $U \cap M$ é uma vizinhança aberta de p em M e p é um ponto arbitrário de M, segue que i é uma imersão. Finalmente, para mostrar que i é um homeomorfismo sobre sua imagem, basta provar que a aplicação identidade $\mathrm{Id} : M \to M$ é um homeomorfismo, onde o domínio de Id é munido da topologia $\tau_{\mathcal{A}}$ e o contra-domínio de Id é munido da topologia τ. Como ambas as topologias coincidem, segue que Id é de fato um homeomorfismo. $\square$

O corolário seguinte é conhecido como o teorema da mudança de contra-domínio.

Corolário 4.4.3. Sejam M, N variedades diferenciáveis, $f : M \to N$ uma aplicação e $P \subset N$ uma subvariedade tal que $f(M) \subset P$. Seja $\widetilde{f} : M \to P$ a aplicação que difere de f apenas no contra-domínio. Então, f é diferenciáel se, e somente se, $\widetilde{f}$ é diferenciável.

Demonstração. Denotando por $i : P \to N$ a aplicação inclusão, temos que $f = i \circ \widetilde{f}$, i.e., o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd} & N \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\widetilde{f}"] & P \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

comuta. Suponha que f seja diferenciáel. Como $i : P \to N$ é um mergulho segue, em particular, que $i : P \to i(P)$ é um homeomorfismo. Logo, como $f = i \circ \widetilde{f}$ e f é contínua, segue que $\widetilde{f}$ é contínua. Portanto, pelo Corolário 4.2.5, segue que $\widetilde{f}$ é diferenciáel. A recíproca segue da regra da cadeia. $\square$

Exemplo 4.4.4. Seja W um aberto de uma variedade diferenciável M^n. Se (U, φ) é uma carta local em M, com $U \subset W$, temos:

$$\varphi(U \cap W) = \varphi(U) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^n.$$

Isso mostra que W é uma subvariedade n-dimensional de M. A carta $\overline{\varphi}$ em W, correspondente à carta (U, φ), é igual a φ. Logo, a estrutura diferenciável induzida por M na subvariedade W, no sentido do Teorema 4.4.2, é constituída pelas cartas de M com domínio contido em W, ou seja, coincide com a estrutura diferenciável que M induz no subconjunto aberto W.

Exemplo 4.4.5. Seja W um subespaço vetorial de um espaço vetorial V de dimensão n. Seja $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ um isomorfismo linear tal que $\varphi(W) = \mathbb{R}^m$, onde $m = \dim(W)$. Então (V, φ) é uma carta local em V que satisfaz (4.1), logo W é uma subvariedade de V. A carta $\overline{\varphi} = \varphi|_W : W \to \mathbb{R}^m$ em W, associada a φ, é um isomorfismo linear e, portanto, a estrutura diferenciável induzida em W por V coincide com a estrutura diferenciável usual do espaço vetorial W.

4.5 Mergulhos

Como vimos na Seção 4.2, um mergulho de uma variedade M sobre outra variedade N é uma aplicação que é, ao mesmo tempo, um mergulho topológico e uma imersão diferenciável, e que se relaciona fortemente com o conceito de subvariedade. O objetivo desta seção é estudar condições necessárias e suficientes para que a imagem de uma variedade M por uma imersão $f : M \to N$ seja uma subvariedade em N.

Teorema 4.5.1. *Seja $f : M^m \to N^n$ uma imersão. Então, $f(M)$ é uma subvariedade de N se, e somente se, $f : M \to f(M)$ é uma aplicação aberta em relação à topologia induzida em $f(M)$.*

Demonstração. Se $f(M)$ é uma subvariedade de N então, pelo Corolário 4.4.3, $f : M \to f(M)$ é uma imersão e, portanto, um difeomorfismo local. Em particular, $f : M \to f(M)$ é uma aplicação aberta. Reciprocamente, pelo Teorema 4.2.3, para cada $p \in M$, existem uma carta local (U, φ) em M, com $p \in U$, e um difeomorfismo $\psi : V \to \varphi(U) \times W$ tal que

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = (x, 0),$$

para todo $x \in \varphi(U)$. Segue então que

$$\psi(f(U)) = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n.$$

Como $f : M \to f(M)$ é aberta, temos que $f(U)$ é um aberto relativo a $f(M)$ e, portanto, existe um aberto $\widetilde{V}$ em N tal que $f(U) = \widetilde{V} \cap f(M)$. Podemos supor então, sem perda de generalidade, que $\widetilde{V} = V$. Assim,

$$\begin{aligned} \psi(V \cap f(M)) &= \psi(f(U)) \\ &= (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(U)) \\ &= \psi(V) \cap \mathbb{R}^m, \end{aligned}$$

mostrando que $f(M)$ é uma subvariedade de N. $\square$

Corolário 4.5.2. Se $f : M^m \to N^n$ é um mergulho, então $f(M)$ é uma subvariedade de N e $f : M \to f(M)$ é um difeomorfismo.

Demonstração. Em virtude do Teorema 4.5.1, temos que $f(M)$ é uma subvariedade de N e $f : M \to f(M)$ é um homeomorfismo diferenciável. Resta provar que f^{-1} é diferenciável. Dado $p \in M$, seja $\overline{\psi} : V \cap f(M) \to \psi(V) \cap \mathbb{R}^m$ a carta em $f(M)$ correspondente à carta (V, ψ) em N, com $f(p) \in V$, como no Teorema 4.5.1. Como

$$f(U) = V \cap f(M),$$

faz sentido considerar a representação de $f^{-1} : f(M) \to M$ em relação às cartas $\overline{\psi}$ e φ. Essa representação é igual à aplicação identidade do aberto $\varphi(U)$. Assim, f^{-1} é diferenciável na vizinhança aberta $V \cap f(M)$ de $f(p)$ em $f(M)$. Como $p \in M$ foi escolhido de forma arbitrária, concluímos que $f^{-1} : f(M) \to M$ é diferenciável. $\square$

Corolário 4.5.3. Um subconjunto M de uma variedade diferenciável N é uma subvariedade de N se, e somente se, for imagem de um mergulho.

Demonstração. Toda subvariedade de N é imagem de sua própria inclusão que, em virtude do Teorema 4.4.2, é um mergulho. A recíproca segue diretamente do Corolário 4.5.2. $\square$

Finalizaremos essa seção relacionando o espaço tangente a uma subvariedade com o espaço tangente da variedade ambiente. Mais precisamente, dados uma subvariedade M de uma variedade diferenciável N e um ponto $p \in M$, queremos saber a relação existente entre o espaço tangente T_pM e o espaço tangente T_pN. É natural esperar que T_pM seja um subespaço de T_pN, assim como ocorre ao espaço tangente de uma subvariedade Euclidiana M em $\mathbb{R}^n$, que é um subespaço de $\mathbb{R}^n$. A questão é que T_pM não é exatamente um subespaço de T_pN, mas apenas naturalmente isomorfo a um subespaço de T_pN.

No espaço tangente, construído usando curvas segunda a Definição 3.4.2, um elemento de T_pM é determinado por uma classe de equivalência de uma curva γ em M passando por p; tal curva γ também determina uma classe de equivalência que é um elemento de T_pN. No entanto, as classes de equivalência determinadas por γ vista como curva em M e vista como curva em N não coincidem; existem curvas em N que são tangentes a γ mas que não são curvas em M.

Identificaremos T_pM com um subespaço de T_pN da seguinte forma. Se $i : M \to N$ denota a aplicação inclusão então, para todo $p \in M$, identificaremos o espaço tangente T_pM com a imagem da diferencial $\mathrm{d}i(p)$ através da diferencial

$$\mathrm{d}i(p) : T_pM \to T_{i(p)}N.$$

Note que, como i é um mergulho e, em particular, uma imersão, temos que $\mathrm{d}i(p)$ é injetora e é, portanto, um isomorfismo sobre sua imagem. Trabalharemos então como se T_pM fosse um subespaço de T_pN e como se a diferencial $\mathrm{d}i(p) : T_pM \to T_pN$ fosse a aplicação inclusão de T_pM em T_pN.

4.6 Valores regulares

No Capítulo 2 vimos que pré-imagem de valor regular, através de aplicações diferenciáveis, são subvariedades Euclidianas. É natural esperar que esta propriedade também ocorra no contexto de variedades diferenciáveis, e é o que veremos nesta seção. O resultado seguinte é uma aplicação simples do teorema do posto, mas que é útil para encontrar exemplos de subvariedades.

Teorema 4.6.1. *Seja $f : M^m \to N^n$ uma aplicação diferenciável com posto constante e igual a r em todos os pontos de M, com $r \leq \min\{m, n\}$. Então, para cada ponto $q \in f(M)$, o conjunto $f^{-1}(q)$ é uma subvariedade fechada de M de dimensão igual a $m - r$.*

Demonstração. O conjunto $f^{-1}(q)$ é fechado em M pois é a imagem inversa do fechado $\{q\}$ em N por uma aplicação contínua. Dado $p \in f^{-1}(q)$, segue do Teorema 4.1.1 que existem cartas (U, φ), (V, ψ) em M e N, respectivamente, com $p \in U$, $\varphi(p) = 0$, $f(U) \subset V$ e $\psi(q) = 0$, tais que

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = (x_r, 0) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r},$$

para todo $x = (x_r, x_{m-r}) \in \varphi(U)$. Disso decorre que os únicos pontos de U que são transformados em q por f são aqueles cujas r primeiras coordenadas são zero, i.e.,

$$\begin{aligned} U \cap f^{-1}(q) &= \varphi^{-1}\big((\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^{-1}(0)\big) \\ &= \varphi^{-1}\big(\{x \in \varphi(U) : x_1 = \ldots = x_r = 0\}\big). \end{aligned}$$

Isso significa que

$$\varphi(U \cap f^{-1}(q)) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^{m-r},$$

mostrando que $f^{-1}(q)$ é subvariedade de M de dimensão $m - r$. □

Como consequência direta do Teorema 4.6.1, temos o seguinte

Corolário 4.6.2. Se $n \leq m$ e o posto de f é constante e igual a n em todo ponto de $f^{-1}(q)$, então $f^{-1}(q)$ é uma subvariedade fechada de M.

O teorema seguinte é o resultado análogo à Proposição 2.2.1 para subvariedades Euclidianas e, assim como o Teorema 4.6.1, nos dá um método de obter subvariedades que são pré-imagens de valores regulares.

Teorema 4.6.3. *Considere uma aplicação diferenciável $f : M^m \to N^n$ e $c \in N$ um valor regular de f. Então, o conjunto $f^{-1}(c)$ é uma subvariedade de M de dimensão $m - n$ e, para todo $p \in f^{-1}(c)$, tem-se:*

$$T_p f^{-1}(c) = \ker(\mathrm{d}f(p)).$$

Demonstração. Dado um ponto $p \in f^{-1}(c)$, segue do Teorema 4.3.3 que existem uma carta local (V, ψ) em N, com $c \in V$ e $\psi(c) = 0$, e um difeomorfismo $\varphi : U \to \psi(V) \times W$, com $p \in U$ e $f(U) \subset V$, tais que

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n), \tag{4.3}$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m) \in \varphi(U)$. Temos:

$$\varphi(U \cap f^{-1}(c)) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^{-1}(0) = \varphi(U) \cap \left(\{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n}\right).$$

Seja $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ um isomorfismo linear que transforma o subespaço $\{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ sobre $\mathbb{R}^{m-n} \subset \mathbb{R}^m$. Então, $T \circ \varphi : U \to T(\varphi(U))$ é uma carta em M que satisfaz

$$\begin{aligned} (T \circ \varphi)(U \cap f^{-1}(c)) &= T\left(\varphi(U) \cap (\{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n})\right) \\ &= T(\varphi(U)) \cap \mathbb{R}^{m-n}, \end{aligned}$$

ou seja, $T \circ \varphi$ é uma carta local em M satisfazendo (4.1). Isso mostra que $f^{-1}(c)$ é uma subvariedade $(m - n)$-dimensional de M. Além disso, como φ

é um difeomorfismo que transforma $U \cap f^{-1}(c)$ sobre $\varphi(U) \cap (\{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n})$, temos que $\mathrm{d}\varphi(p)$ transforma o espaço tangente a $U \cap f^{-1}(c)$ no ponto p, que é igual a $T_p f^{-1}(c)$, sobre o espaço tangente a $\varphi(U) \cap (\{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n})$ no ponto $\varphi(p)$, que é igual a $\{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$. Ou seja,

$$\mathrm{d}\varphi(p)\left(T_p f^{-1}(c)\right) = \{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n}. \tag{4.4}$$

Diferenciando (4.3) no ponto $\varphi(p)$, obtemos:

$$\left(\mathrm{d}\psi(f(p)) \circ \mathrm{d}f(p) \circ \mathrm{d}\varphi(p)^{-1}\right)(v_1, \ldots, v_m) = (v_1, \ldots, v_n),$$

para todo $(v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{R}^m$. Assim,

$$\ker\left(\mathrm{d}\psi(f(p)) \circ \mathrm{d}f(p) \circ \mathrm{d}\varphi(p)^{-1}\right) = \{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n}. \tag{4.5}$$

Como $\mathrm{d}\psi(f(p))$ e $\mathrm{d}\varphi(p)$ são isomorfismos, temos:

$$\begin{aligned} \ker\left(\mathrm{d}\psi(f(p)) \circ \mathrm{d}f(p) \circ \mathrm{d}\varphi(p)^{-1}\right) &= \ker\left(\mathrm{d}f(p) \circ \mathrm{d}\varphi(p)^{-1}\right) \\ &= \mathrm{d}\varphi(p)\left(\ker(\mathrm{d}f(p))\right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

De (4.5) e (4.6), obtemos

$$\mathrm{d}\varphi(p)\left(\ker(\mathrm{d}f(p))\right) = \{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n}.$$

Comparando com (4.4), obtemos então

$$\mathrm{d}\varphi(p)\left(T_p f^{-1}(c)\right) = \mathrm{d}\varphi(p)\left(\ker(\mathrm{d}f(p))\right),$$

o que implica que $T_p f^{-1}(c) = \ker(\mathrm{d}f(p))$. $\square$

4.7 Exercícios

4.1

1. Seja $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável e suponha M conexa. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes.

(a) Para cada ponto $p \in M$, existem cartas locais contendo p e $f(p)$, para as quais a correspondente representação de f é linear.

(b) f tem posto constante.

4.2

1. Considere a curva $\alpha : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3 - t, t^2)$. Verifique que f é uma imersão injetora, mas não é um mergulho.

2. Encontrar uma imersão $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ e uma função descontínua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f \circ g$ seja diferenciável.

3. Seja $f : M^m \to N^n$ uma aplicação diferenciável. Prove que:

(a) Se f é injetora, então $m \leq n$ e o conjunto dos pontos nos quais f tem posto m é aberto e denso em M.

(b) Se f é aberta, então $m \geq n$ e o conjunto dos pontos nos quais f tem posto n é aberto e denso em M.

4. Seja $f : M \to N$ uma imersão. Prove que, para todo $p \in M$, existem abertos $U \subset M$ e $V \subset N$, com $p \in U$ e $f(U) \subset V$, de modo que a aplicação $f|_U : U \to V$ admite uma inversa à esquerda $g : V \to U$ diferenciável.

5. Sejam (M, τ) um espaço topológico, N uma variedade diferenciável e $f : M \to N$ uma aplicação contínua. Prove que existe, no máximo, uma estrutura diferenciável $\mathcal{A}$ em M que torna f uma imersão, com $\tau_{\mathcal{A}} = \tau$.

4.3

1. Sejam M, N, P variedades diferenciáveis, $\pi : M \to N$ uma submersão sobrejetora, $f : M \to P$ uma aplicação diferenciável e $\overline{f} : N \to P$ uma aplicação tal que $\overline{f} \circ \pi = f$. Prove que $\overline{f}$ é diferenciável.

2. Prove que toda submersão $f : M \to N$, com M compacta e N conexa, é sobrejetora.

3. Prove que a aplicação quociente $\pi : \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}P^n$ é uma submersão.

4. Seja M^n uma variedade diferenciável compacta. Prove que não existe submersão $f : M^n \to \mathbb{R}^k$, para qualquer $k \geq 1$.

5. Sejam X um espaço topológico, Y um conjunto e $\pi : X \to Y$ uma aplicação.

(a) Prove que a coleção $\tau = \{U \subset Y : \pi^{-1}(U) \text{ é aberto em } X\}$ é uma topologia[1] em Y.

(b) Prove que se Y é munido da topologia co-induzida por π então $\pi : X \to Y$ é contínua.

(c) Assuma que Y é munido da topologia co-induzida por π. Sejam Z um espaço topológico e $f : X \to Z$, $\overline{f} : Y \to Z$ aplicações tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y \arrow[r, "\overline{f}"'] & Z \end{tikzcd}$$

comuta. Prove que f é contínua se, e somente se, $\overline{f}$ é contínua.

6. Sejam X, Y espaço topológicos e $\pi : X \to Y$ uma aplicação. Prove que:

(a) Se π é contínua, aberta e sobrejetora então π é uma aplicação quociente.

(b) Se π é contínua, fechada e sobrejetora então π é uma aplicação quociente.

(c) Se X é compacto, Y é Hausdorff e π é contínua e sobrejetora então π é uma aplicação quociente.

7. O objetivo deste exercício é provar que toda submersão é uma aplicação aberta.

(a) Sejam X, $\widetilde{X}$, Y, $\widetilde{Y}$ espaços topológicos, $\varphi : X \to \widetilde{X}$, $\psi : Y \to \widetilde{Y}$ homeomorfismos e $f : X \to Y$ uma aplicação. Prove que se $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é uma aplicação aberta então f também é uma aplicação aberta.

[1] A topologia τ é chamada a *topologia co-induzida* por π em Y; quando Y é munido da topologia co-induzida por π diz-se também que π é uma *aplicação quociente*.

(b) Seja X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma aplicação. Suponha que para todo $x \in X$ existem abertos $U \subset X$ e $V \subset Y$, com $x \in U$ e $f(U) \subset V$, de modo que $f|_U : U \to V$ seja uma aplicação aberta. Prove que f é uma aplicação aberta.

(c) Prove que a projeção $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mapsto (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é uma aplicação aberta.

(d) Use o Teorema 4.3.3 e os itens anteriores para concluir que toda submersão é uma aplicação aberta.

8. Prove que toda submersão sobrejetora é uma aplicação quociente.

4.4

1. Prove que o gráfico de uma aplicação diferenciável $f : M^m \to N^n$ é uma subvariedade m-dimensional de $M \times N$.

2. Sejam $f : M \to N$ um difeomorfismo e P uma subvariedade de M. Prove que $f(P)$ é uma subvariedade de N, $f|_P : P \to f(P)$ é um difeomorfismo e $T_{f(p)}f(P) = \mathrm{d}f(p)(T_pP)$, para todo $p \in P$.

3. Dado uma aplicação diferenciável $f : M \to N$ prove que, para todo $p \in M$, o espaço tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ coincide com o gráfico de $\mathrm{d}f(p)$.

4. Sejam N uma variedade diferenciável e $M \subset N$ um subconjunto discreto, i.e., a topologia induzida em M por N é discreta. Prove que M é uma subvariedade 0-dimensional de N.

5. Prove que o conjunto

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 = y^3\}$$

é uma curva de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, mas não é de classe C^2.

6. Dado uma aplicação diferenciável $f : M \to N$, considere subvariedades $P \subset M$ e $Q \subset N$, com $f(P) \subset Q$. Denote por $\widetilde{f} : P \to Q$ a restrição de f às subvariedades P e Q. Prove que $\widetilde{f}$ é diferenciável e $\mathrm{d}\widetilde{f}(p) : T_pP \to T_{f(p)}Q$ é a restrição de $\mathrm{d}f(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ a T_pP, para todo $p \in P$.

4.5

1. Prove que se $f : M \to N$ é uma imersão injetora, com M compacta, então f é um mergulho.

2. Se $f : M \to N$ é um mergulho, prove que

$$T_{f(p)}f(M) = \mathrm{Im}(\mathrm{d}f(p)),$$

para todo $p \in M$.

3. Seja $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável que admite uma inversa à esquerda diferenciável. Prove que f é um mergulho.

4. A aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(t) = (2\cos t + t, \sin t),$$

é um mergulho? Justifique.

Capítulo 5

Campos vetoriais

5.1 O fibrado tangente

Dado uma variedade diferenciável M^n, denotemos por TM a união disjunta de todos os espaços tangentes a M. Mais precisamente, definimos:

$$TM = \bigcup_{p \in M} \big(\{p\} \times T_pM \big).$$

O conjunto TM é chamado o *fibrado tangente* de M. Um dos objetivos desta seção é provar que TM pode ser visto de maneira natural como uma variedade diferenciável. Para isso, definimos uma aplicação $\pi : TM \to M$ pondo

$$\pi(p, v) = p,$$

para quaisquer $p \in M$ e $v \in T_pM$. A aplicação π é claramente sobrejetora, e é chamada a *projeção canônica* de TM sobre M. Quando necessário, indentificaremos o espaço tangente T_pM com o subconjunto $\{p\} \times T_pM$ de TM através da bijeção natural

$$v \in T_pM \mapsto (p, v) \in \{p\} \times T_pM.$$

Teorema 5.1.1. *O fibrado tangente TM é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$.*

Demonstração. Dado uma carta local (U, φ) em M, definimos uma aplicação $\overline{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ pondo

$$\overline{\varphi}(p, v) = \big(\varphi(p), \mathrm{d}\varphi(p) \cdot v\big),$$

para quaisquer $p \in U$ e $v \in T_pM$. Como φ é bijetora e $\mathrm{d}\varphi(p)$ é um isomorfismo linear para todo $p \in U$, a aplicação $\overline{\varphi}$ é bijetora. Como $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ é um aberto de $\mathbb{R}^{2n}$, segue que $\overline{\varphi}$ é uma carta local em TM. Provaremos que

$$\mathcal{A} = \{\overline{\varphi} : (U, \varphi) \text{ é carta de } M\}$$

é um atlas em TM. Em primeiro lugar, é fácil ver que os domínios das aplicações de $\mathcal{A}$ cobrem TM. Sejam então (U, φ), (V, ψ) cartas locais em M. Temos:

$$\overline{\varphi}\big(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\big) = \overline{\varphi}\big(\pi^{-1}(U \cap V)\big) = \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

e

$$\overline{\psi}\big(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\big) = \overline{\psi}\big(\pi^{-1}(U \cap V)\big) = \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n.$$

Como $\varphi(U \cap V)$ e $\psi(U \cap V)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$, segue que os conjuntos imagens

$$\overline{\varphi}\big(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\big) \quad \text{e} \quad \overline{\psi}\big(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\big)$$

são abertos em $\mathbb{R}^{2n}$. Dado um ponto $(x, h) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$, tem-se que $\overline{\varphi}^{-1}(x, h) = (p, v)$, onde $p = \varphi^{-1}(x)$ e $v = \mathrm{d}\varphi(p)^{-1} \cdot h$. Além disso, se $p \in V$ então $\overline{\psi}(p, v) = (\psi(p), \mathrm{d}\psi(p) \cdot v)$. Temos:

$$\mathrm{d}\psi(p) \cdot v = \big(\mathrm{d}\psi(\varphi^{-1}(x)) \cdot \mathrm{d}\varphi(\varphi^{-1}(x))^{-1}\big) \cdot h = \mathrm{d}(\psi \circ \varphi^{-1})(x) \cdot h.$$

Assim, a aplicação de transição

$$\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \to \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n,$$

de $\overline{\varphi}$ para $\overline{\psi}$, é dada por

$$\big(\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}^{-1}\big)(x, h) = \big((\psi \circ \varphi^{-1})(x), \mathrm{d}(\psi \circ \varphi^{-1})(x) \cdot h\big).$$

Como $\psi \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável, o mesmo vale para $\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}^{-1}$. De forma análoga podemos provar que a inversa de $\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}^{-1}$, que é igual a $\overline{\varphi} \circ \overline{\psi}^{-1}$, também é diferenciável. Isso prova que $\mathcal{A}$ é um atlas em TM. Resta provar que a topologia induzida por $\mathcal{A}$ em TM é Hausdorff e satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade. Antes disso, provemos que a projeção π é contínua, onde TM está munido da topologia induzida por $\mathcal{A}$. De fato, se $U \subset M$ é o domínio de uma carta φ em M, então $\pi^{-1}(U)$ é aberto em TM, pois $\pi^{-1}(U)$ é o domínio da carta $\overline{\varphi}$. Em geral, se $U \subset M$ é um aberto arbitrário, então $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, onde U_α é o domínio de uma carta em M, para todo $\alpha \in I$. Assim, $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in I} \pi^{-1}(U_\alpha)$ é aberto em TM. Provemos então que a topologia $\tau_{\mathcal{A}}$ é Hausdorff. Sejam (p, v), (q, w) pontos distintos em TM. Se $p \neq q$ então, como M é Hausdorff, existem abertos disjuntos $U, V \subset M$, com $p \in U$ e $q \in V$. Assim, $\pi^{-1}(U)$ e $\pi^{-1}(V)$ são abertos disjuntos em TM contendo (p, v) e (q, w), respectivamente. Se $p = q$, seja (U, φ) uma carta em M, com $p \in U$. Como $\mathrm{d}\varphi(p) \cdot v \neq \mathrm{d}\varphi(p) \cdot w$, existem abertos disjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ contendo $\mathrm{d}\varphi(p) \cdot v$ e $\mathrm{d}\varphi(p) \cdot w$, respectivamente. Assim, $\overline{\varphi}^{-1}\big(\varphi(U) \times A\big)$ e $\overline{\varphi}^{-1}\big(\varphi(U) \times B\big)$ são abertos disjuntos em TM contendo (p, v) e (q, w), respectivamente. Provemos agora que a topologia $\tau_{\mathcal{A}}$ satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade. Como M satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade, temos que o atlas maximal que define a estrutura diferenciável de M contém um atlas enumerável $\{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$. Assim, $\{\overline{\varphi}_i : i \in \mathbb{N}\}$ é um atlas enumerável para TM e, portanto, TM satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade (cf. Exercícios 5.1.3 e 5.1.4). $\square$

Veremos agora algumas propriedades básicas do fibrado tangente.

Lema 5.1.2. A projeção $\pi : TM \to M$ é uma submersão.

Demonstração. Dado uma carta local (U, φ) em M, considere a correspondente carta local $\overline{\varphi}$ em TM. Como $\pi(\pi^{-1}(U)) \subset U$, a representação de π em relação às cartas locais $\overline{\varphi}$ e φ é a projeção $\overline{\pi} : \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \to \varphi(U)$ dada por $\overline{\pi}(x, h) = x$, que é uma submersão.

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\overline{\varphi}"'] & U \arrow[d, "\varphi"] \\ \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "\overline{\pi}"] & \varphi(U) \end{tikzcd}$$

Isso prova que a restrição de π a $\pi^{-1}(U)$ é uma submersão. Como φ é uma carta arbitrária, segue a conclusão. $\square$

Lema 5.1.3. Sejam M uma variedade diferenciável e $W \subset M$ um subconjunto aberto. Então TW é um aberto de TM tal que a estrutura diferenciável usual do fibrado tangente da variedade W coincide com a estrutura diferenciável que TM induz no aberto TW.

Demonstração. Observe inicialmente que, como $T_pW = T_pM$, para todo $p \in W$, tem-se $TW = \pi^{-1}(W)$. Além disso, como π é contínua, segue que TW é aberto em TM. A estrutura diferenciável usual do fibrado tangente de W é o atlas maximal que contém as cartas locais da forma $\overline{\varphi}$, onde (U, φ) é uma carta de W. Se (U, φ) é uma carta de W, então (U, φ) também é carta em M, logo $\overline{\varphi}$ é uma carta de TM com domínio contido em TW, provando que $\overline{\varphi}$ pertence à estrutura diferenciável induzida por TM no aberto TW. $\square$

Exemplo 5.1.4. Seja E um espaço vetorial real n-dimensional. Para cada ponto $p \in E$, tem-se $T_pE = E$, logo

$$TE = \bigcup_{p \in E} \big(\{p\} \times T_pE\big) = E \times E.$$

Se $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo linear, φ é uma carta para a variedade E, e a carta correspondente $\overline{\varphi} : E \times E \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ em TE é dada por

$$\overline{\varphi}(p, v) = (\varphi(p), \varphi(v)).$$

Isso mostra, em particular, que $\overline{\varphi} : E \times E \to \mathbb{R}^{2n}$ é um isomorfismo linear. Portanto, tanto a estrutura diferenciável usual do fibrado tangente de E quanto a estrutura diferenciável usual do espaço vetorial real $E \times E$ contém o atlas

$$\mathcal{A} = \{\overline{\varphi} : \varphi \text{ é carta de } E\}.$$

Isso prova que a estrutura diferenciável usual de TE coincide com a estrutura diferenciável usual do espaço vetorial real $E \times E$.

Como consequência do Lema 5.1.3 e do Exemplo 5.1.4, temos o seguinte

Corolário 5.1.5. Se W é um aberto de $\mathbb{R}^n$, então $TW = W \times \mathbb{R}^n$, e a estrutura diferenciável usual do fibrado tangente de W coincide com a estrutura diferenciável induzida por $\mathbb{R}^{2n}$ no aberto $W \times \mathbb{R}^n$.

Finalizaremos essa seção mostrando a relação existente entre o espaço tangente T_pM com o fibrado tangente TM.

Proposição 5.1.6. Cada espaço tangente T_pM é subvariedade do fibrado tangente TM. Além disso, a estrutura diferenciável usual do espaço vetorial T_pM coincide com a estrutura diferenciável induzida por TM em T_pM.

Demonstração. Como $T_pM = \pi^{-1}(p)$ e π é uma submersão, segue que T_pM é uma subvariedade de TM. Dado uma carta (U, φ) em M, considere a carta correspondente $\overline{\varphi}$ em TM. Temos:

$$\overline{\varphi}\big(\pi^{-1}(U) \cap T_pM\big) = \overline{\varphi}(T_pM) = \{\varphi(p)\} \times \mathbb{R}^n.$$

Considere o difeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ definido por

$$\phi(x, h) = (h, x - \varphi(p)).$$

Segue que $\phi \circ \overline{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \phi(\varphi(U) \times \mathbb{R}^n)$ é uma carta em TM e:

$$(\phi \circ \overline{\varphi})\big(\pi^{-1}(U) \cap T_pM\big) = \mathbb{R}^n = \phi\big(\varphi(U) \cap \mathbb{R}^n\big) \cap \mathbb{R}^n,$$

i.e., $\phi \circ \overline{\varphi}$ é uma carta de TM que satisfaz a relação (4.1). A restrição de $\phi \circ \overline{\varphi}$ a T_pM nos fornece uma carta local em T_pM pertencente à estrutura diferenciável induzida por TM em T_pM. Tal restrição é dada por

$$v \in T_pM \mapsto (\phi \circ \overline{\varphi})(p, v) = \mathrm{d}\varphi(p) \cdot v \in \mathbb{R}^n.$$

Mas $\mathrm{d}\varphi(p) : T_pM \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo linear e, portanto, é também uma carta local pertencente à estrutura diferenciável usual do espaço vetorial real T_pM. Concluimos então que o atlas $\{\mathrm{d}\varphi(p)\}$ em T_pM está contido tanto na estrutura diferenciável induzida por TM em T_pM como na estrutura diferenciável usual do espaço vetorial real T_pM. $\square$

5.2 Campos vetoriais

Uma das motivações para termos introduzido o fibrado tangente é a noção de campo vetorial, que discutiremos nessa seção.

Definição 5.2.1. Um *campo vetorial* numa variedade diferenciável M^n é simplesmente uma aplicação $X : M \to TM$ que torna o diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "X"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"'] & TM \arrow[d, "\pi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

comutativo.

Em outras palavras, uma aplicação $X : M \to TM$ é um campo vetorial se, e somente se, X é uma inversa à direita da projeção canônica π. Um campo vetorial X numa variedade M é também chamado uma *seção* do fibrado tangente TM, no sentido de que $X(p) \in T_pM$, para todo $p \in M$.

O conjunto de todos os campos vetoriais diferenciáveis de uma variedade diferenciável será denotado por $\mathfrak{X}(M)$. Com as operações naturais

$$\begin{aligned} (X + Y)(p) &= X(p) + Y(p), \\ (cX)(p) &= cX(p), \end{aligned}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$ e $c \in \mathbb{R}$, o conjunto $\mathfrak{X}(M)$ torna-se um espaço vetorial real (cf. Exercício 5.2.3).

Dados um campo vetorial $X : M \to TM$ e uma carta local (U, φ) em M, podemos escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p),$$

para todo $p \in U$, onde cada $a_i : U \to \mathbb{R}$ é uma função no aberto U e $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)\right\}$ é a base de T_pM associada à carta φ. Considerando a carta $\overline{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ em TM, associada a φ, temos:

$$\overline{\varphi}(p, X(p)) = (\varphi(p), a_1(p), \ldots, a_n(p)),$$

para todo $p \in U$. Assim,

$$\big(\overline{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1}\big)(x) = \big(x, (a_1 \circ \varphi^{-1})(x), \ldots, (a_n \circ \varphi^{-1})(x)\big),$$

para todo $x \in \varphi(U)$. Portanto, X é diferenciável se, e somente se, as funções a_i são diferenciáveis, para todo $1 \leq i \leq n$.

Lema 5.2.2. Todo campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um mergulho.

Demonstração. Decorre diretamente do Exercício 4.5.3, observando que a projeção $\pi : TM \to M$ é uma inversa diferenciável à esquerda para X. $\square$

Corolário 5.2.3. A imagem de um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ é uma subvariedade de TM, e a restrição da projeção $\pi : TM \to M$ a $X(M)$ é um difeomorfismo da imagem de X sobre M.

Demonstração. Como X é um mergulho, em virtude do Lema 5.2.2, segue que $X(M)$ é uma subvariedade de TM e $X : M \to X(M)$ é um difeomorfismo. Para concluir a prova, basta observar que $\pi|_{X(M)} : X(M) \to M$ é a inversa de $X : M \to X(M)$. $\square$

5.3 Derivações lineares

O objetivo dessa seção é obter uma nova interpretação para o espaço tangente de uma variedade diferenciável M^n.

Uma *derivação* num ponto $p \in M$ é um funcional linear $D\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ que satisfaz a relação

$$D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g), \tag{5.1}$$

para quaisquer $f, g \in C^\infty(M)$. A relação (5.1) é usualmente conhecida como a *regra de Leibniz*. Usando (5.1) e a linearidade de D, obtemos

$$cD(f) = D(cf) = D(c)f(p) + cD(f),$$

para quaisquer $f \in C^\infty(M)$ e $c \in \mathbb{R}$. Disso decorre que $D(c)f(p) = 0$. Em particular, se $f(p) \neq 0$, segue que $D(c) = 0$, ou seja, qualquer derivação se anula nas funções constantes.

Exemplo 5.3.1. Dado um vetor arbitrário $v \in T_pM$, definimos uma função $\overline{v}\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ pondo

$$\overline{v}(f) = (f \circ \lambda)'(0), \tag{5.2}$$

onde $\lambda\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é uma curva diferenciável, com $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = v$. Afirmamos que $\overline{v}$ é uma derivação em p. De fato, é fácil ver que $\overline{v}$ está bem definida e a linearidade de $\overline{v}$ segue da linearidade da derivada. Além disso, dados $f, g \in C^\infty(M)$, temos:

$$\begin{aligned}
\overline{v}(fg) &= (fg \circ \lambda)'(0) \\
&= \big((f \circ \lambda) \cdot (g \circ \lambda)\big)'(0) \\
&= (f \circ \lambda)'(0) \cdot (g \circ \lambda)(0) + (f \circ \lambda)(0) \cdot (g \circ \lambda)'(0) \\
&= \overline{v}(f)g(p) + f(p)\overline{v}(g).
\end{aligned}$$

Exemplo 5.3.2. Uma situação particular do Exemplo 5.3.1 ocorre quando o vetor escolhido é um vetor coordenado. Mais precisamente, se (U, φ) é uma carta local em M^n, com $p \in U$, obtemos n derivações

$$\frac{\overline{\partial}}{\partial x_i}(p) : C^\infty(M) \to \mathbb{R},$$

onde $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)\right\}$ denota a base de T_pM associada a φ. Assim, dado $f \in C^\infty(M)$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{\partial}}{\partial x_i}(p)(f) &= (f \circ \lambda)'(0) \\
&= (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \lambda)'(0) \\
&= \mathrm{d}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \circ \mathrm{d}(\varphi \circ \lambda)(0) \\
&= \mathrm{d}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot \mathrm{d}\varphi(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \\
&= \mathrm{d}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot e_i \\
&= \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)),
\end{aligned}$$

onde $\lambda\colon (-\epsilon, \epsilon) \to U$ é curva diferenciável, com $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$.

Denotemos por $\mathrm{Der}_p(M)$ o conjunto de todas as derivações em p de uma variedade M. O lema seguinte caracteriza a estrutura algébrica de $\mathrm{Der}_p(M)$.

Lema 5.3.3. O conjunto $\mathrm{Der}_p(M)$, munido das operações de soma e produto por escalar, dadas por

$$\begin{aligned} (D+T)(f) &= D(f)+T(f) \\ (cD)(f) &= cD(f), \end{aligned} \tag{5.3}$$

torna-se um espaço vetorial real, onde $D, T \in \mathrm{Der}_p(M)$, $f \in C^\infty(M)$ e $c \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Provemos, inicialmente, que $\mathrm{Der}_p(M)$ é fechado em relação às operações em (5.3). De fato, sejam $D, T \in \mathrm{Der}_p(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$ e $c \in \mathbb{R}$. Temos:

$$\begin{aligned} (D+T)(fg) &= D(fg)+T(fg) \\ &= D(f)g(p)+f(p)D(g)+T(f)g(p)+f(p)T(g) \\ &= \big(D(f)+T(f)\big)g(p)+f(p)\big(D(g)+T(g)\big) \\ &= (D+T)(f)g(p)+f(p)(D+T)(g) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (cD)(fg) &= cD(fg) \\ &= cD(f)g(p)+cf(p)D(g) \\ &= (cD)(f)g(p)+f(p)(cD)(g). \end{aligned}$$

Os axiomas que caracterizam um espaço vetorial são deixados a critério do leitor. □

O Lema 5.3.3 não nos diz qual é a dimensão do espaço vetorial $\mathrm{Der}_p(M)$. O teorema seguinte, além de responder a essa questão, nos garante que as derivações do Exemplo 5.3.1 são, essencialmente, as únicas derivações em $p \in M$. Para isso, usaremos o seguinte lema auxiliar.

Lema 5.3.4. Dado uma função diferenciável $f\colon U \to \mathbb{R}$, onde U é um aberto convexo de $\mathbb{R}^n$, com $0 \in U$, existem funções diferenciáveis $g_i\colon U \to \mathbb{R}$, com $1 \le i \le n$, tais que:

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x),$$

para todo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$.

Demonstração. Dado $x \in U$, defina uma função $h_x\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ pondo

$$h_x(t) = f(tx),$$

para todo $t \in [0,1]$. Temos:

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)x_i \mathrm{d}t = \int_0^1 h'_x(t)\mathrm{d}t = h_x(1) - h_x(0) = f(x) - f(0),$$

ou seja,

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)x_i \mathrm{d}t.$$

Assim, basta definir:

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\mathrm{d}t,$$

para todo $1 \leq i \leq n$. $\square$

De acordo com a notação do Exemplo 5.3.1, temos o seguinte:

Teorema 5.3.5. *A aplicação* $\phi : T_pM \to \mathrm{Der}_p(M)$, *definida por*

$$\phi(v) = \overline{v},$$

é um isomorfismo linear.

Demonstração. A linearidade de ϕ segue da linearidade de (5.2). Dado uma derivação $D \in \mathrm{Der}_p(M)$, escolha uma carta (U, φ) em M, com $\varphi(U)$ convexo, $p \in U$ e $\varphi(p) = 0$. Dado $f \in C^\infty(M)$, defina

$$h = f \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \to \mathbb{R}.$$

Como $\varphi(U)$ é convexo, segue do Lema 5.3.4 que existem funções diferenciáveis $\widetilde{g}_i : \varphi(U) \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, tais que

$$h(x) = h(0) + \sum_{i=1}^n x_i \widetilde{g}_i(x),$$

para todo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \varphi(U)$. Como $x = \varphi(q)$, para algum $q \in U$, temos:

$$\begin{aligned} f(q) &= h(\varphi(q)) \\ &= h(0) + \sum_{i=1}^n \pi_i(\varphi(q))\widetilde{g}_i(\varphi(q)) \\ &= h(0) + \sum_{i=1}^n \varphi_i(q) g_i(q), \end{aligned}$$

onde $\varphi_i(q) = \pi_i(\varphi(q))$ e $g_i(q) = (\widetilde{g}_i \circ \varphi)(q)$, para todo $q \in U$. Assim,

$$\begin{aligned} D(f) &= \sum_{i=1}^{n} D(\varphi_i g_i) = \sum_{i=1}^{n} \big(D(\varphi_i)g_i(p) + \varphi_i(p)D(g_i)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} D(\varphi_i)g_i(p). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x_i}(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{h(te_i) - h(0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{h(0) + t\widetilde{g}_i(te_i) - h(0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \widetilde{g}_i(te_i) = \widetilde{g}_i(0). \end{aligned}$$

Disso decorre, juntamente com o Exemplo 5.3.2, que:

$$\frac{\overline{\partial}}{\partial x_i}(p)(f) = \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) = \frac{\partial h}{\partial x_i}(0) = \widetilde{g}_i(0) = g_i(p).$$

Fazendo $a_i = D(\varphi_i)$, segue que (5.4) que

$$D(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\overline{\partial}}{\partial x_i}(p)(f) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\overline{\partial}}{\partial x_i}(p)\right)(f),$$

ou seja,

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p)\right)(f) = D(f).$$

Como $f \in C^\infty(M)$ foi escolhida de forma arbitrária, provamos que ϕ é sobrejetora. Além disso, dado $v \in T_pM$, com

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p),$$

temos:

$$\begin{aligned} \overline{v}(\varphi_i) &= \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\overline{\partial}}{\partial x_j}(p)(\varphi_i) = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial(\varphi_i\circ\varphi^{-1})}{\partial x_j}(\varphi(p)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial \pi_i}{\partial x_j}(\varphi(p)) = a_i, \end{aligned}$$

para todo $1 \le i \le m$. Assim, se $\overline{v} = 0$ então $\overline{v}(\varphi_i) = 0$, para todo $1 \le i \le n$, logo $a_i = 0$, para todo $1 \le i \le n$. Portanto, $v = 0$ e, assim, ϕ é injetora. $\square$

Do Teorema 5.3.5 obtemos que os vetores tangentes em T_pM podem ser identificados como derivações em p. Essa noção de derivação pode ser globalizada, como veremos a seguir.

5.4 Derivação em variedades

Uma *derivação* numa variedade diferenciável M^n é um operador linear $\mathcal{D} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ que satisfaz globalmente a regra de Leibniz

$$\mathcal{D}(fg) = \mathcal{D}(f)g + f\mathcal{D}(g),$$

para quaisquer $f, g \in C^\infty(M)$.

Exemplo 5.4.1. Dado um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, definimos uma aplicação $\overline{X} \colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ pondo

$$\overline{X}(f)(p) = \mathrm{d}f(p) \cdot X(p), \tag{5.5}$$

para quaisquer $f \in C^\infty(M)$ e $p \in M$. Afirmamos que $\overline{X}$ é uma derivação em M. De fato, devemos provar, inicialmente, que $\overline{X}(f) \in C^\infty(M)$, para toda $f \in C^\infty(M)$. Para isso, seja (U, φ) uma carta local em M. Assim, para todo $p \in U$, podemos escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \tag{5.6}$$

onde as funções $a_i \colon U \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis, para todo $1 \leq i \leq n$. Portanto,

$$\overline{X}(f)(p) = \mathrm{d}f(p) \cdot X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p)\mathrm{d}f(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(p),$$

para todo $p \in U$. Isso prova que $\overline{X}(f)$ é uma função diferenciável no aberto U. Como U foi escolhido arbitrariamente, tem-se $\overline{X}(f) \in C^\infty(M)$. A linearidade de $\overline{X}$ segue diretamente da linearidade da derivada em funções. Além disso, segue de (5.5) que

$$\overline{X}(f)(p) = \overline{X(p)}(f),$$

para todo $p \in M$. Assim, dados $f, g \in C^\infty(M)$ e $p \in M$, temos:

$$\begin{aligned} \overline{X}(fg)(p) &= \overline{X(p)}(fg) = \overline{X(p)}(f)g(p) + f(p)\overline{X(p)}(g) \\ &= \overline{X}(f)(p) \cdot g(p) + f(p)\overline{X}(g)(p) \\ &= \big(\overline{X}(f)g + f\overline{X}(g)\big)(p). \end{aligned}$$

Como $p \in M$ é arbitrário, segue a afirmação.

Seguindo a notação do Exemplo 5.4.1, temos a seguinte:

Proposição 5.4.2. Sejam M^n uma variedade diferenciável e $X\colon M \to TM$ um campo vetorial. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $X \in \mathfrak{X}(M)$.

(b) $\overline{X}(f) \in C^\infty(M)$, para toda $f \in C^\infty(M)$.

Demonstração. Do Exemplo 5.4.1, resta provar que $(b) \Rightarrow (a)$. Suponha então que $\overline{X}(f) \in C^\infty(M)$, para toda $f \in C^\infty(M)$. Dado $p \in M$, considere uma carta local (U, φ) em M, com $p \in U$, e seja $\overline{\varphi}\colon \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ a carta correspondente a φ em TM. Temos:

$$(\overline{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = \big(\varphi(p), a_1(p), \dots, a_n(p)\big),$$

para todo $p \in U$, onde as funções a_i são dadas como em (5.6). Definindo $\varphi_i = \pi_i \circ \varphi$, para todo $1 \leq i \leq n$, temos:

$$a_i(p) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p) \cdot X(p) = \mathrm{d}\varphi_i(p) \cdot X(p) = \overline{X}(\varphi_i)(p),$$

para quaisquer $p \in U$ e $1 \leq i \leq n$. Como $\overline{X}(\varphi_i)$ é diferenciável em U, segue que $a_i \in \mathrm{C}^\infty(U)$, para todo $1 \leq i \leq n$. Isso prova que a representação de X nas cartas φ e $\overline{\varphi}$ é diferenciável. Portanto, $X \in \mathfrak{X}(M)$. $\square$

Denotemos por $\mathrm{Der}(M)$ o conjunto de todas as derivações em M. De forma análoga ao Lema 5.3.3, temos que $\mathrm{Der}(M)$ é um espaço vetorial real. O teorema seguinte é a versão global do Teorema 5.3.5.

Teorema 5.4.3. *A aplicação $\phi\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathrm{Der}(M)$, definida por*

$$\phi(X) = \overline{X},$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, é um isomorfismo linear.

Demonstração. A linearidade de ϕ segue diretamente da linearidade da derivada (5.5). Seja $\mathcal{D} \in \mathrm{Der}(M)$. Dado $p \in M$, a função $\mathcal{D}_p\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, definida por

$$\mathcal{D}_p(f) = \mathcal{D}(f)(p),$$

para toda $f \in C^\infty(M)$, é uma derivação em p, ou seja, $\mathcal{D}_p \in \mathrm{Der}_p(M)$. Assim, do Teorema 5.3.5, existe $v \in T_pM$ tal que $\overline{v} = \mathcal{D}_p$. Isso define uma aplicação $X\colon M \to TM$ tal que $\pi \circ X = \mathrm{Id}$ e $\overline{X}(f) = \mathcal{D}(f)$, para toda $f \in C^\infty(M)$, pois

$$\overline{X}(f)(p) = \overline{X(p)}(f) = \mathcal{D}_p(f) = \mathcal{D}(f)(p),$$

para todo $p \in M$. Como $\mathcal{D}(f) \in C^\infty(M)$, temos que $\overline{X}(f) \in C^\infty(M)$. Assim, pela Proposição 5.4.2, segue que X é diferenciável, i.e., $X \in \mathfrak{X}(M)$. Isso prova que ϕ é sobrejetora. Finalmente, sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tais que $\phi(X) = \phi(Y)$. Disso decorre que

$$\overline{X}(f)(p) = \overline{Y}(f)(p),$$

para quaisquer $f \in C^\infty(M)$ e $p \in M$. Ou seja, $\overline{X(p)}(f) = \overline{Y(p)}(f)$, para quaisquer $f \in C^\infty(M)$ e $p \in M$. Isso implica que $\overline{X(p)} = \overline{Y(p)}$, para todo $p \in M$. Assim, pelo Teorema 5.3.5, temos que $X(p) = Y(p)$, para todo $p \in M$, i.e., $X = Y$, e isso mostra que ϕ é injetora. □

Em virtude do Teorema 5.4.3, identificaremos naturalmente cada campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ como uma derivação em M e, para cada função $f \in C^\infty(M)$, denotaremos simplesmente por $X(f)$ a função associada.

Proposição 5.4.4. Dados duas derivações $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in \mathrm{Der}(M)$, a aplicação $[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2]\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, definida por

$$[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2] = \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1,$$

também é uma derivação em M.

Demonstração. Dados $f, g \in C^\infty(M)$, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(fg)) &= \mathcal{D}_1\big(\mathcal{D}_2(f)g + f\mathcal{D}_2(g)\big) \\ &= \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(f))g + \mathcal{D}_2(f)\mathcal{D}_1(g) + \mathcal{D}_1(f)\mathcal{D}_2(g) + f\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(g)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1(fg)) &= \mathcal{D}_2\big(\mathcal{D}_1(f)g + f\mathcal{D}_1(g)\big) \\ &= \mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1(f))g + \mathcal{D}_1(f)\mathcal{D}_2(g) + \mathcal{D}_2(f)\mathcal{D}_1(g) + f\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1(g)). \end{aligned}$$

Cancelando os termos semelhantes, obtemos:

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2](fg) &= \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(f))g + f\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(g)) - \mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1(f))g - f\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1(g)) \\ &= [\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2](f)g + f[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2](g), \end{aligned}$$

e isso prova que $[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2] \in \mathrm{Der}(M)$. □

Corolário 5.4.5. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, existe um único campo vetorial $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ tal que

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)),$$

para toda $f \in C^\infty(M)$.

O campo vetorial $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$, dado pelo Corolário 5.4.5, é chamado o *colchete de Lie* dos campos X e Y e é, usualmente, denotado por

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Proposição 5.4.6. O colchete de Lie satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $[X, Y] = -[Y, X]$,

(b) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$,

(c) $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(X(g))Y - g(Y(f))X$,

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$.

Demonstração. Basta identificar os campos acima como derivações e avaliar nas funções de $C^\infty(M)$. □

O item (b) da Proposição 5.4.6 é chamado a *identidade de Jacobi.* Note que a aplicação

$$(X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \mapsto [X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$$

é bilinear sobre $\mathbb{R}$ porém, pelo item (c), não é bilinear sobre $C^\infty(M)$. Além disso, pelo item (b), segue que X, Y, Z são permutados ciclicamente.

Observação 5.4.7. Dados uma carta local (U, φ) em M e dois campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, podemos representá-los no aberto U como

$$X|_U = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad Y|_U = \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Assim, o colchete de Lie entre X e Y, no aberto U, é dado por

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^n \left(X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{5.7}$$

Exemplo 5.4.8. Em $\mathbb{R}^2$, com coordenadas (x, y), considere os campos vetoriais $X = y\frac{\partial}{\partial y}$ e $Y = x\frac{\partial}{\partial y}$. Dado uma função $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, temos:

$$\begin{aligned}
[X, Y](f) &= \left[y\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}\right](f) \\
&= yx\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - x\frac{\partial f}{\partial y} - xy\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
&= -x\frac{\partial}{\partial y}(f) = -Y(f).
\end{aligned}$$

Portanto, neste caso, tem-se $[X, Y] = -Y$.

5.5 Exercícios

5.1

1. Prove que o fibrado tangente do círculo $\mathbb{S}^1$ é difeomorfo ao cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

2. Dado uma superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$, considere o conjunto

$$S(M) = \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : p \in M, v \in T_pM, \|v\| = 1\}.$$

Prove que $S(M)$ é uma superfície de dimensão $2m - 1$, conhecida como o *fibrado tangente unitário* de M. Prove que $S(M)$ é compacto se, e somente se, M é compacta.

3. Um espaço topológico X é chamado um espaço de *Lindelöf* se toda cobertura aberta de X admite uma subcobertura enumerável. Prove que se X satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade então X é um espaço de Lindelöf.

4. Sejam M um conjunto e $\mathcal{A}$ um atlas em M. Prove que se $\mathcal{A}$ contém um atlas enumerável para M então a topologia induzida por $\mathcal{A}$ em M satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade.

5.2

1. Dado uma variedade diferenciável M, e fixados um ponto $p \in M$ e um vetor $v \in T_pM$, prove que existe um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X(p) = v$.

2. Prove que existe um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$ com uma única singularidade.

3. Dado uma variedade diferenciável M^n, prove que o conjunto $\Gamma(M)$ de todos os campos vetoriais em M, munido das operações:

$$\begin{aligned} (X + Y)(p) &= X(p) + Y(p) \\ (cX)(p) &= cX(p), \end{aligned}$$

para quaisquer $X, Y \in \Gamma(M)$, $p \in M$ e $c \in \mathbb{R}$, é um espaço vetorial real. Prove também que $\mathfrak{X}(M)$ é um subespaço vetorial de $\Gamma(M)$.

4. Considere os campos vetoriais $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ dados por

$$X = z\partial_y - y\partial_z, \quad Y = -z\partial_x + x\partial_z, \quad Z = y\partial_x - x\partial_y.$$

Prove que a aplicação

$$(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mapsto aX + bY + cZ \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$$

é linear e injetora.

5.3

1. Sejam $D : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ uma derivação em $p \in M$ e $f, g \in C^\infty(M)$ tais que $f \equiv g$ em um aberto $U \subset M$ contendo p. Prove que $D(f) = D(g)$.

5.4

1. Prove que $[X, X] = 0$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

2. Dado uma carta local (U, φ) em uma variedade diferenciável M^n, considere os campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $1 \le i \le n$, associados a φ. Prove que

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0,$$

para quaisquer $1 \le i, j \le n$.

3. Dado um aberto U de uma variedade diferenciável M, considere um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X(f) = 0$, para toda função $f \in \mathrm{C}^\infty(U)$. Prove que $X|_U = 0$.

Capítulo 6

Métricas Riemannianas e Conexões

6.1 Métricas Riemannianas

Definição 6.1.1. Uma *métrica Riemanniana* em uma variedade diferenciável M é uma correspondência $\langle , \rangle$ que associa, a cada ponto $p \in M$, um produto interno $\langle , \rangle_p$ em T_pM e que varia diferenciavelmente no sentido de que a função

$$p \in M \mapsto \langle X(p), Y(p) \rangle_p$$

é diferenciável para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)(M)$.

Uma *variedade Riemanniana* é um par $(M, \langle , \rangle)$, onde M é uma variedade diferenciável e $\langle , \rangle$ é uma métrica Riemanniana em M. Dado uma uma carta local (U, φ) em $(M, \langle , \rangle)$, com $\varphi \sim (x_1, \ldots, x_n)$, denote por $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$ as 1-formas duais aos campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Dados $p \in U$ e $v, w \in T_pM$, escrevamos

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \quad \text{e} \quad w = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p).$$

Usando a bilinearidade da métrica, obtemos

$$\langle v, w \rangle_p = \sum_{i,j} g_{ij}(p) v_i w_j,$$

onde

$$g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle .$$

Como $g_{ij} = g_{ji}$, podemos escrever

$$\langle , \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_j = \sum_{i \leq j} \tilde{g}_{ij} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j,$$

onde

$$\tilde{g}_{ii} = g_{ii} \quad \text{e} \quad \tilde{g}_{ij} = 2g_{ij}, \text{ se } i \neq j.$$

Exemplo 6.1.2. No espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, identifiquemos

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0),$$

com $1 \leq i \leq n$ e qualquer que seja o ponto $p \in \mathbb{R}^n$. Assim, a métrica é dada por

$$\langle e_i, e_j \rangle_p = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij},$$

ou seja,

$$\langle , \rangle = \mathrm{d}x_1^2 + \ldots + \mathrm{d}x_n^2.$$

Observação 6.1.3. Seja $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ outra carta local em M, com $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ e $\tilde{\varphi} \sim (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$. Então

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_i}(p) \frac{\partial}{\partial x_k}(p),$$

de modo que a relação entre as expressões locais de $\langle , \rangle$ em relação às cartas locais (U, φ) e $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ é dada por

$$\tilde{g}_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \right\rangle = \sum_{k,l} \frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_i} \frac{\partial x_l}{\partial \tilde{x}_j} g_{kl}.$$

Exemplo 6.1.4. A métrica Euclidiana em $\mathbb{R}^2$ é dada por

$$\langle , \rangle = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2.$$

Passando para coordenadas polares

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \cos \theta \mathrm{d}r - r \sin \theta \mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}y &= \sin \theta \mathrm{d}r + r \cos \theta \mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Assim,

$$\langle , \rangle = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2 \mathrm{d}\theta^2.$$

Exemplo 6.1.5. Considere uma superfície de rotação M^2 em $\mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$\varphi(s,\theta) = (a(s)\cos\theta, a(s)\sin\theta, b(s)),$$

onde a, b são funções diferenciáveis definidas num intervalo aberto de $\mathbb{R}$, com $a > 0$, e $\gamma(s) = (a(s), 0, b(s))$ é a curva geratriz de M^2, satisfazendo $\|\gamma'\|^2 = (a')^2 + (b')^2 = 1$. Considere M^2 munida da métrica Riemanniana $\langle,\rangle$ induzida de $\mathbb{R}^3$, i.e., cada plano tangente T_pM está munido do produto interno induzido de $\mathbb{R}^3$. Tais planos tangentes são gerados pelas derivadas parciais

$$\begin{aligned} \varphi_s &= \big(a'(s)\cos\theta, a'(s)\sin\theta, b'(s)\big) \\ \varphi_\theta &= \big(-a(s)\sin\theta, a(s)\cos\theta, 0\big). \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \langle,\rangle &= \langle\varphi_s,\varphi_s\rangle \mathrm{d}s^2 + 2\langle\varphi_s,\varphi_\theta\rangle \mathrm{d}s\mathrm{d}\theta + \langle\varphi_\theta,\varphi_\theta\rangle \mathrm{d}\theta^2 \\ &= \mathrm{d}s^2 + a(s)^2\mathrm{d}\theta^2. \end{aligned}$$

Exemplo 6.1.6. Seja $f : M \to N$ uma imersão entre variedades diferenciáveis, i.e., para cada ponto $p \in M$, a diferencial $\mathrm{d}f(p)$ é uma aplicação linear injetora. Suponha que N esteja munida de uma métrica Riemanniana $\langle,\rangle$. Podemos usar tal métrica para definir uma métrica em M da seguinte forma: dados $p \in M$ e $v, w \in T_pM$, definimos

$$\langle v, w\rangle_p = \langle \mathrm{d}f(p)\cdot v, \mathrm{d}f(p)\cdot w\rangle_{f(p)}.$$

Como $\mathrm{d}f(p)$ é injetora, segue que $\langle,\rangle_p$ é positivo definido. Além disso, a diferenciabilidade de f e $\langle,\rangle$ implicam que a métrica definida em M também é diferenciável.

Proposição 6.1.7. Toda variedade diferenciável M^n admite métrica Riemanniana.

Demonstração. Se $f : M^n \to \mathbb{R}^{2n+1}$ é um mergulho, dado pelo teorema de Whitney, o resultado segue do Exemplo 6.1.6. □

Dados uma variedade Riemanniana M e uma curva diferenciável por partes $\gamma : [a,b] \to M$, definimos o *comprimento* de γ pondo

$$l(\gamma) = \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle_{\gamma(t)}}\mathrm{d}t.$$

Dados dois pontos $p, q \in M$, definimos a *distância* de p a q em termos de $\langle , \rangle$ pondo

$$d(p,q) = \inf_{\gamma \in \bigwedge_{p,q}} l(\gamma),$$

onde $\bigwedge_{p,q}$ denota o conjunto de todas as curvas diferenciáveis por partes unindo p a q.

Definição 6.1.8. Uma *isometria* entre duas variedades Riemannianas M e N é um difeomorfismo $f : M \to N$ que satisfaz

$$\langle v, w \rangle_p = \langle \mathrm{d}f(p) \cdot v, \mathrm{d}f(p) \cdot w \rangle_{f(p)},$$

para quaisquer $p \in M$ e $v, w \in T_pM$.

Exemplo 6.1.9. Dados variedades Riemannianas $(M_1^{n_1}, \langle , \rangle^1)$ e $(M_2^{n_2}, \langle , \rangle^2)$, considere a variedade produto $M^{n_1+n_2} = M_1 \times M_2$. Considerando as projeções $\pi_i : M \to M_i$, $i = 1, 2$, e dados $(p, q) \in M$ e $v, w \in T_pM$, definimos

$$\langle v, w \rangle_{(p,q)} = \langle \mathrm{d}\pi_1(v), \mathrm{d}\pi_1(w) \rangle_p^1 + \langle \mathrm{d}\pi_2(v), \mathrm{d}\pi_2(w) \rangle_q^2.$$

Dado uma variedade Riemanniana M, denote por $\mathrm{Iso}(M)$ o conjunto de todas as isometrias de M. Com a operação de composição, $\mathrm{Iso}(M)$ tem estrutura de grupo.

Teorema 6.1.10 (Myers-Steenrod [17])**.** *O grupo Iso(M) tem a estrutura de grupo de Lie em relação à topologia compacto-aberta. A isotropia, em qualquer ponto, é compacto. Além disso, se M é compacta o mesmo vale para Iso(M).*

6.2 A conexão de Levi-Civita

Definição 6.2.1. Uma *conexão afim* em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

que, a cada par de campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, associa um campo vetorial $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

(b) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

(c) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in \mathrm{C}^\infty$.

O que faremos agora é analisar a dependência de uma conexão afim ∇ em cada um dos seus parâmetros.

Proposição 6.2.2. Dados um ponto $p \in M$ e campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o valor $(\nabla_X Y)(p)$ depende somente de $X(p)$ e da restrição de Y ao longo de uma curva diferenciável $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = X(p)$.

Demonstração. Mostremos inicialmente que, em qualquer aberto $U \subset M$, o campo vetorial $(\nabla_X Y)|_U$ depende somente de $X|_U$ e $Y|_U$. De fato, sejam $X', Y' \in \mathfrak{X}(M)$ tais que

$$X'|_U = X|_U \quad \text{e} \quad Y'|_U = Y|_U.$$

Considere uma função $f \in \mathrm{C}^\infty$, com $\mathrm{supp} f \subset U$, tal que $f \equiv 1$ em um aberto V de M, com $p \in V \subset \overline{V} \subset U$. Então, usando o item (b) da Definição 6.2.1 e o fato que $fX = fX'$ em M, temos

$$\begin{aligned} (\nabla_X Y)(p) &= f(p)(\nabla_X Y)(p) = (f\nabla_X Y)(p) = (\nabla_{fX} Y)(p) \\ &= (\nabla_{fX'} Y)(p) = f(p)(\nabla_{X'} Y)(p) \\ &= (\nabla_{X'} Y)(p). \end{aligned}$$

Isso mostra que $\nabla_X Y = \nabla_{X'} Y$ no aberto U. Por outro lado, como $fY = fY'$ em M, temos $\nabla_X(fY) = \nabla_X(fY')$. Assim, usando o item (c) e o fato que $X(p)(f) = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} (\nabla_X Y)(p) &= f(p)(\nabla_X Y)(p) = f(p)(\nabla_X Y)(p) + X(p)(f)Y(p) \\ &= (f\nabla_X Y)(p) + (X(f)Y)(p) = (f\nabla_X Y + X(f)Y)(p) \\ &= (\nabla_X(fY))(p) = (\nabla_X(fY'))(p) \\ &= (\nabla_X Y')(p), \end{aligned}$$

mostrando que $\nabla_X Y = \nabla_X Y'$ em U. Isso mostra que $(\nabla_X Y)|_U$ depende somente de $X|_U$ e $Y|_U$. Considere agora uma carta local (U, φ) em M, com $p \in U$ e $\varphi \sim (x_1, \ldots, x_n)$. Pelo que já foi provado, temos que

$$(\nabla_X U)|_U = \nabla_{X|_U}(Y|_U).$$

Escrevamos

$$X|_U = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad Y|_U = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

com $a_i, b_j \in \mathrm{C}^\infty(U)$. Usando as propriedades de ∇ no aberto U, temos

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_X \left(\sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_j \left(b_j \nabla_X \frac{\partial}{\partial x_j} + X(b_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\
&= \sum_{i,j} \left(a_i b_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(b_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\
&= \sum_{i,j,k} a_i b_j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}
\end{aligned}$$

onde

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Assim, a representação local de $\nabla_X Y$ na carta local (U, φ) é dada por

$$(\nabla_X Y)|_U = \sum_k \left(\sum_{i,j} a_i b_j \Gamma_{ij}^k + \sum_i a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{6.1}$$

Em particular,

$$(\nabla_X Y)(p) = \sum_k \left(\sum_{i,j} a_i(p) b_j(p) \Gamma_{ij}^k(p) + X(p)(b_k) \right) \frac{\partial}{\partial x_k}(p).$$

A fórmula acima envolve somente os valores das funções a_i e b_j em p, e das derivadas direcionais de b_k na direção de $X(p)$, e isso finaliza a prova. $\square$

As funções diferenciáveis Γ_{ij}^k são chamadas os *símbolos de Christoffel* da conexão ∇ em relação à carta local escolhida.

Observação 6.2.3. Como consequência da Proposição 6.2.2, podemos escrever $\nabla_{X(p)} Y$ ao invés de $(\nabla_X Y)(p)$. Isso pode ser visto como a derivada direcional do campo Y na direção do vetor $X(p)$.

Teorema 6.2.4. *Dado uma variedade Riemanniana $(M, \langle , \rangle)$, existe uma única conexão afim ∇ em M, chamada a conexão de Levi-Civita de M, satisfazendo as seguintes propriedades:*

(a) $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$,

(b) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$,

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Suponha, inicialmente, a existência de uma tal conexão ∇. Assim,

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, & (6.2)\\ Y\langle Z, X\rangle &= \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle, & (6.3)\\ Z\langle X, Y\rangle &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle. & (6.4)\end{aligned}$$

Somando (6.2) e (6.3), subtraindo (6.4) e usando o item (b), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \nabla_Y X, Z\rangle = \frac{1}{2}\big(&X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle \\ &- \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle\big) \end{aligned} \tag{6.5}$$

A fórmula (6.5), conhecida como *fórmula de Koszul*, define $\nabla_Y X$ de forma única, pois Z é arbitrário e $\langle , \rangle$ é não-degenerada. Para mostrar a existência, defina ∇ pela fórmula de Koszul. $\square$

Uma conexão satisfazendo o item (a) do Teorema 6.2.4 é dita ser *compatível* com a métrica $\langle , \rangle$ (cf. Exercício 5). A condição (b) expressa o fato que a *torção* de ∇, definida por

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

é nula; diz-se também que a conexão é *simétrica*.

Observação 6.2.5. Dados uma conexão simétrica ∇ e uma carta local (U, φ) em M, com $\varphi \sim (x_1, \ldots, x_n)$, temos:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0,$$

para $1 \leq i, j \leq n$. Isso mostra que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Exemplo 6.2.6. O objetivo aqui é mostrar que a conexão de Levi-Civita ∇ em $\mathbb{R}^n$ coincide com a derivada usual de campos vetoriais em $\mathbb{R}^n$. De fato, se $(x_1, \ldots, x_n)$ são as coordenadas globais usuais em $\mathbb{R}^n$, temos

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0,$$

para quaisquer $1 \leq i, j \leq n$. Segue então da fórmula de Koszul (6.5) que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = 0$, com $1 \leq i, j \leq n$, ou seja, todos os símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k são nulos. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, e escrevendo

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

onde $a_i, b_j \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, segue da fórmula (6.1) que

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_k \left(\sum_i a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_k X(b_k) \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= X(Y) = \mathrm{d}Y(X), \end{aligned}$$

como queríamos.

Exemplo 6.2.7. Considere o semi-plano superior

$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

munido da métrica Riemanniana

$$\langle , \rangle = \frac{1}{y^2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2).$$

Calculemos a conexão de Levi-Civita de $(\mathbb{R}^2_+, \langle , \rangle)$. Derivando a expressão

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \frac{1}{y^2}$$

em relação a x e y, e usando o item (a) do Teorema 6.2.4, obtemos

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = -\frac{1}{y^3}.$$

Além disso, derivando a expressão

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \frac{1}{y^2}$$

em relação a x e y, obtemos

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = -\frac{1}{y^3}.$$

Por outro lado, do item (b), obtemos

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x} = 0.$$

Assim, derivando

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = 0,$$

obtemos

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \frac{1}{y^3} \quad \text{e} \quad \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = 0.$$

Como $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$ são sempre ortogonais, obtemos

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{e} \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y}.$$

6.3 Exercícios

6.1

6. Sejam $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ o *catenoide*, que é a superfície gerada pela rotação em torno do eixo z da curva $x = \cosh z$, e $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^3$ o *helicoide*, que é a superfície gerada por retas paralelas ao plano xy que interceptam o eixo z e a hélice $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$.

(a) Mostre que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{H}$ são superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$ escrevendo parametrizações naturais.

(b) Seja $\langle , \rangle = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ a métrica usual de $\mathbb{R}^3$. Mostre que $(\mathcal{C}, \langle , \rangle|_{\mathcal{C}})$ e $(\mathcal{H}, \langle , \rangle|_{\mathcal{H}})$ são superfícies localmente isométricas.

7. Usando partição da unidade, prove que toda variedade diferenciável admite métrica Riemanniana.

8. Prove que as isometrias da esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, munida da métrica induzida, são as restrições das aplicações lineares ortogonais.

6.2

5. Seja $(M, \langle , \rangle)$ uma variedade Riemanniana. Uma conexão afim ∇ em M é dita ser *compatível* com a métrica $\langle , \rangle$ se, para toda curva diferenciável $\gamma : I \to M$ e quaisquer pares de campos vetoriais paralelos X e Y ao longo de γ, tivermos $\langle X, Y \rangle = const.$

(a) Prove que ∇ é compatível com a métrica $\langle , \rangle$ se, e somente se, para todo par X e Y de campos vetoriais ao longo da curva γ tem-se

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle X, Y \rangle = \left\langle \frac{DX}{\mathrm{d}t}, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{DY}{\mathrm{d}t} \right\rangle, \quad t \in I.$$

(b) Conclua, daí, que ∇ é compatível com a métrica se, e somente se,

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Referências Bibliográficas

[1] Adachi, M., *Embeddings and Immersions*, Translations of Mathematical Monographs, AMS, v. 124, 1993.

[2] M. Berger, B. Gostiaux, *Differential Geometry: Manifolds, Curves and Surfaces*, Springer-Verlag, 1088.

[3] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Prentice-Hall, New Jersey, 1976.

[4] J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, 1960.

[5] Donaldson, S. K.; Kronheimer, P. B., *The geometry of four-manifolds*, Clarendon Press, New York, 1990.

[6] Freedman, M.; Quinn, F., *Topology of* 4*-manifolds*, Princeton University Press, Princeton, 1990.

[7] Guillemin, V., Pollack, A., *Differential Topology*, Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1974.

[8] Hirsch, M. W., *Differential Topology*, Springer-Verlag, New York, GTM 33, 1976.

[9] Kervaire, M. A., *A manifold which does not admit any differentiable structure*, Comment. Math. Helv. **34** (1960) 257–270.

[10] Lee, J. M., *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, GTM 218, 2006.

[11] Lima, E. L., *Curso de Análise*, vol. 2, Projeto Euclides, IMPA, 1999.

[12] Milnor, J., *On manifolds homeomorphic to the* 7*-sphere*, Ann. of Math., **64** (1956), 399–405.

[13] Moise, E. E., *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[14] A. P. Morse, *The behaviour of a function on its critical set*, Annals of Mathematics **40** (1), (1939), 62–70.

[15] Munkres, J. R., *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1984.

[16] Munkres, J. R., *Obstructions to the smoothing of piecewise differentiable homeomorphisms*, Annals of Math., **72** (1960) 521–554.

[17] S. B. Myers, N. E. Steenrod, *The group of isometries of a Riemannian manifold*. Ann. of Math. (2) **40** (1939), no. 2, 400–416.

[18] A. Sard, *The measure of the critical values of differentiable maps*, Bulletin of the American Mathematical Society **48** (12), (1942), 883–890.

[19] Spivak, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. 1, Publish or Perish, Inc., 1999.

[20] Warner, F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, 2000.

[21] Whitney, H., *Differentiable manifolds*, Ann. of Math, (2) **37** (1936), 645 – 680.