Lista 8
Geometria Riemanniana – SMA5947
Prof. Fernando Manfio

Assunto: O teorema de Hopf-Rinow

1. Uma geodésica $\gamma : [0, +\infty] \to M$ em uma variedade Riemanniana M é um *raio partindo de* p se $\gamma(0) = p$ e $d(p, \gamma(t)) = t$, para todo $t \geq 0$. Mostre que toda variedade Riemanniana completa e não-compacta M contém um raio partindo de p, qualquer que seja o ponto $p \in M$.

2. Uma curva diferenciável $\gamma : [0, \infty] \to M$ em uma variedade Riemanniana M é dita ser *divergente* se, para todo compacto $K \subset M$, existe $t_0 \in (0, +\infty)$ tal que $\gamma(t) \notin K$, para todo $t > t_0$. Mostre que M é completa se, e somente se, o comprimento de qualquer curva divergente é ilimitado.

3. Considere uma variedade diferenciável M com a propriedade de que ela é completa em relação a qualquer métrica Riemanniana. Mostre, neste caso, que M deve ser compacta.

4. Mostre que toda variedade Riemanniana homogênea é completa.

5. Considere duas isometrias locais $f, g : M \to N$ entre variedades Riemannianas, onde M é conexa. Assuma que exista um ponto $p \in M$ tal que $f(p) = g(p)$ e $\mathrm{d}f(p) = \mathrm{d}g(p)$. Mostre que $f = g$.