Lista 6
Geometria Riemanniana – SMA5947
Prof. Fernando Manfio

Assunto: Grupos de Lie

1. Prove que todo grupo de Lie compacto e conexo admite uma métrica bi-invariante.

2. Seja G um grupo de Lie munido de uma métrica bi-invariante. Mostre que os campos invariantes à esquerda e os campos invariantes à direita são campos de Killing.

3. Considere o grupo ortogonal $G = \mathrm{O}(n)$ e denote por $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie. Prove que, para qualquer $c > 0$, a aplicação

$$\langle X, Y \rangle = -c \,\mathrm{trace}(XY),$$

onde $X, Y \in \mathfrak{g}$, define um produto interno em $\mathfrak{g}$ que é Ad-invariante.

4. Seja G um grupo de Lie e denote por $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie. Dizemos que um produto interno $\langle , \rangle$ em $\mathfrak{g}$ é ad-*invariante* se a identidade

$$\langle \mathrm{ad}_Z X, Y \rangle + \langle X, \mathrm{ad}_Z Y \rangle = 0$$

vale para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Prove que todo produto interno Ad-invariante em $\mathfrak{g}$ é ad-invariante. Prove que vale a recíproca se G é conexo.