

Lista 6
Cálculo I – SMA0353
Prof. Fernando Manfio

Assunto: O teorema do valor intermediário

1. Dada a função $f(x) = x^5 + x + 1$, justifique a seguinte afirmação: f tem, pelo menos, uma raiz no intervalo $[-1, 0]$.
2. Prove que a equação $x^3 - 4x + 2 = 0$ admite três raízes reais distintas.
3. Prove que a equação $x^3 - \frac{1}{1+x^4}$ admite, pelo menos, uma raiz real.
4. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0) = 1$ e $f(x)$ é racional para todo $x \in (0, 1]$. Prove que $f(x) = 1$ para todo $x \in [0, 1]$.
5. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $0 \leq f(x) \leq 1$, para todo $x \in [0, 1]$. Prove que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$.

Assunto: Funções exponencial e logarítmica

6. Esboce o gráfico das funções:

- (a) $f(x) = 2^x$
- (b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- (c) $f(x) = \log_2 x$
- (d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

7. Calcule os seguintes limites:

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x$
- (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x$
- (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x - 3^x)$
- (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2^x}{1 - 3^x}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x + 2^{-x})$

8. Calcule os seguintes limites:

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$
- (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^x$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3^x - 1}{x^2}$$

9. Calcule os seguintes logaritmos:

(a) $\log_{10} 100$

(b) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$

(c) $\log_3 243$

10. Determine o domínio e esboce o gráfico das seguintes funções.

(a) $f(x) = \log_2(x + 1)$

(b) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

(c) $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$

11. Dado um número real a , com $a > 0$ e $a \neq 1$, calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x$

12. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{x+1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2x+1) - \ln(x+3))$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

13. Dado um número $a > 0$, com $a \neq 1$, prove que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a.$$