

## Lista 5

Geometria Riemanniana – SMA5947

Prof. Fernando Manfio

**Assunto:** Vizinhanças totalmente normais

**1.** Um *campo de Killing* numa variedade Riemanniana  $M$  é simplesmente um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  cujo fluxo local  $\{\varphi_t\}$  consiste de isometrias de  $M$ . Prove que as seguintes condições são equivalentes:

- (a) A derivada de Lie da métrica é identicamente nula, i.e.,  $L_X \langle \cdot, \cdot \rangle = 0$ .
- (b)  $X \langle Y, Z \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle$ , para quaisquer  $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ .
- (c)  $\langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle = 0$ , para quaisquer  $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ . Esta condição implica, em particular, que todo campo vetorial paralelo é um campo de Killing.

**2.** Prove os seguintes fatos a respeito de um campo de Killing  $X \in \mathfrak{X}(M)$ :

- (a) Dado um ponto  $p \in M$ , considere uma vizinhança normal  $U$  de  $p$  em  $M$  para o qual  $p$  é o único ponto de  $U$  que satisfaz  $X(p) = 0$ . Então, no aberto  $U$ ,  $X$  é tangente às esferas geodésicas centradas em  $p$ .
- (b) Dado um ponto  $p \in M$ , com  $X(p) \neq 0$ , existe uma carta local  $(U, \varphi)$  em  $M$ , com  $p \in U$  e  $\varphi \sim (x_1, \dots, x_n)$ , de modo que os coeficientes  $g_{ij}$  da métrica nesta carta local não dependem de  $x_n$ .
- (c) Considere um ponto  $p \in M$  tal que  $X(p) = 0$  e  $\nabla_v X = 0$ , para todo  $v \in T_p M$ . Se  $M$  é conexa então  $X \equiv 0$ .
- (d) Se  $p \in M$  é um ponto crítico da função  $f = \|X\|^2$ , então a curva integral de  $X$  que passa por  $p$  é uma geodésica em  $M$ .

**3.** Dados um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e uma isometria  $f : M \rightarrow N$ , considere o campo vetorial  $Y \in \mathfrak{X}(N)$  definido por  $Y(f(p)) = df(p) \cdot X(p)$ , para todo  $p \in M$ . Prove que  $Y$  é um campo de Killing se, e somente se,  $X$  também o for.