Lista 5
Cálculo I – SMA0353
Prof. Fernando Manfio

Assunto: Extensões do conceito de limite

1. Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(5+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x+3}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+3}{3x^2+x+1}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+1}{x^4+2x+3}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{x^2+3}}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{\sqrt{x^2+x+1}}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x^2+3}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+3x-1}{2x^3-6x+1}$

2. Sejam f e g duas funções definidas em $[a,+\infty)$, com $g(x)\neq 0$ para todo $x\geq a$, tais que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$. Calcule, caso exista, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3. Prove que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$, para qualquer $n\in\mathbb{N}$.

4. Considere uma função f e um número real p de modo que $\lim_{x\to p^+} f(x) = 0$. Suponha que exista um número $r > 0$ tal que $f(x) > 0$, para todo $p < x < p + r$. Prove que

$$\lim_{x\to p^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty. \tag{1}$$

Use o limite em (1) para calcular:

(a) $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}$ (b) $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1}$

5. Calcule os seguintes limites.

(a) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{x+3}$

(b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sqrt{x+3}}{2x-1}$

(c) $\lim_{x\to +\infty} \left(2x - \sqrt{x^2+3}\right)$

6. Calcule os seguintes limites.

(a) $\lim_{x\to 3^+} \frac{5}{3-x}$

(b) $\lim_{x\to 3^-} \frac{5}{3-x}$

(c) $\lim_{x\to 0^-} \frac{3}{x^2-x}$

(d) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x^3-x^2}$

Certas fórmulas que representam quantidades físicas podem conduzir a limites que envolvam infinito. Claramente, uma grandeza física não pode tender para infinito, mas uma análise de uma situação hipotética em que tal fato pudesse ocorrer, pode sugerir usos para outras quantidades relacionadas. Vejamos os seguintes exemplos.

7. A lei de Ohm na teoria da eletricidade afirma que $I = V/R$, onde R é a resistência (em ohms) de um condutor, V é a diferença de potencial (em volts) através do condutor e I é a corrente (em ampères) que passa pelo condutor. A resistência de certas ligas tende para zero quando a temperatura se aproxima do zero absoluto (aproximadamente -273^oC), e a liga se torna um supercondutor de eletricidade. Se a voltagem V é fixa, então, para esse supercondutor,

$$\lim_{R\to 0^+} I = \lim_{R\to 0^+} \frac{V}{R} = +\infty,$$

isto é, a corrente aumenta sem limite. Os supercondutores permitem que grandes correntes sejam usadas em usinas geradoras ou motores. Eles têm também aplicações no transporte terrestre a alta velocidade, no qual o forte campo magnético produzido por magnetos supercondutores permitem que os trens levitem, não havendo essencialmente fricção entre as rodas e os trilhos. Possivelmente a utilização mais importante para os supercondutores está nos circuitos para computadores, porque esses circuitos produzem pouquíssimo calor.

8. A lei da gravitação universal de Newton diz que "toda partícula no universo atrai toda outra partícula com uma força proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre as partículas."Em símbolos,

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

onde F é a força que atua em cada partícula, m_1 e m_2 são as massas das partículas, r é a distância entre elas e G é uam constante gravitacional. Supondo m_1 e m_2 constante, obtemos

$$\lim_{r\to +\infty} F = \lim_{r\to +\infty} G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = 0.$$

Isto nos diz que à medida que a distância entre as partículas aumenta sem limite, a força de atração tende para 0. Teoricamente, sempre há alguma atração; entretanto, se r é muito grande, a atração já não pode ser medida com o equipamento de laboratório convencional.

9. Uma concentração de água salgada na base de 50g de sal por litro de água corre para um tanque que contém inicialmente 50 litros de água pura.
(a) Se o fluxo de água salgada para o tanque é de 5 litros por minuto, determine o volume $V(t)$ de água e a quantidade $A(t)$ de sal no tanque após t minutos.
(b) Estabeleça uma fórmula para a concentração $c(t)$ de sal (em g/l) após t minutos.
(c) O que ocorre com $c(t)$ depois de um longo período de tempo?