

Lista 3
Geometria Riemanniana – SMA5947
Prof. Fernando Manfio

Assunto: Geodésicas

1. Sejam $f : M \rightarrow N$ uma isometria entre variedades Riemannianas e $\gamma : I \rightarrow M$ uma geodésica em M . Prove que a curva $f \circ \gamma : I \rightarrow N$ é uma geodésica em N .

2. Sejam $f : M \rightarrow M$ uma isometria, onde M é uma variedade Riemanniana conexa, e $p \in M$ tal que $f(p) = p$ e $df(p) = id$. Mostre que $f = id_M$.

3. Fixe um ponto $p \in M$. Prove que toda vizinhança W de 0_p em TM contém uma vizinhança da forma

$$\bigcup_{x \in U} B(0_x; \epsilon) = \{v \in TM|_U : \sqrt{\langle v, v \rangle} < \epsilon\},$$

para alguma vizinhança U de p em M e algum $\epsilon > 0$.

4. Dados uma variedade Riemanniana M^n e um ponto $p \in M$, mostre que existe uma vizinhança U de p em M e n campos vetoriais $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(U)$, ortonormais em cada ponto de U , tais que, em p , tem-se $(\nabla_{X_i} X_j)(p) = 0$. Esta coleção de campos vetoriais é chamada de *referencial geodésico* em p .

5. Dados um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ e uma função $f \in C^\infty(M)$, definimos a *divergência* de X como a função $\text{div} X : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\text{div} X(p) = \text{traço} \{Y(p) \mapsto (\nabla_Y X)(p)\},$$

$p \in M$, e o *gradiente* de f como o campo vetorial $\text{grad} f$ em M definido por

$$\langle \text{grad} f(p), v \rangle = df(p) \cdot v,$$

para quaisquer $p \in M$ e $v \in T_p M$.

(a) Se $X_1, \dots, X_n$ é um referencial geodésico em $p \in M$, mostre que

$$\text{grad} f(p) = \sum_{i=1}^n X_i(f) X_i \quad \text{e} \quad \text{div} X(p) = \sum_{i=1}^n X_i(f_i)(p),$$

onde $X = \sum_i f_i X_i$.

(b) Suponha que $M = \mathbb{R}^n$, com as coordenadas usuais $(x_1, \dots, x_n)$. Mostre que

$$\text{grad} f(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad \text{div} X(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

onde $X = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.