Lista 3
Cálculo I – SMA0353
Prof. Fernando Manfio

Assunto: Limites

1. Prove que
$$\lim_{x\to p} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to p} |f(x)| = 0.$$

2. Suponha que $\lim_{x\to p} f(x) = L$, com $L > 0$. Prove que existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in \text{Dom}(f)$, com $0 < |x-p| < \delta$, tem-se $f(x) > 0$.

3. Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2+3x-1}{x^2+2}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}}$

(c) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^4-5x-6}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to p} \frac{x^n-p^n}{x-p}$, $n \in \mathbb{N}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to p} \frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{p}}{x-p}$

(g) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, onde $f(x) = x^2-3x$.

(h) $\displaystyle\lim_{h\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$, onde $f(x) = \frac{1}{x}$.

4. Prove que existe $\delta > 0$ tal que
$$1-\delta < x < 1+\delta \Rightarrow 2-\frac{1}{3} < x^2+x < 2+\frac{1}{3}.$$

5. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $g(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, tal que
$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$
Prove que existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < |x-p| < \delta$, então $|f(x)| < |g(x)|$.

6. Dado uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, suponha que exista um número $r > 0$ tal que $f(x) \geq 0$ para $0 < |x-p| < r$ e que $\lim_{x\to p} f(x) = L$. Prove que $L \geq 0$.

7. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$, onde $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 2, \\ x^2/2, & \text{se } x < 2, \end{cases}$

8. A afirmação

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = \lim_{x\to p^-} f(x) \;\Rightarrow\; f \text{ contínua em } p$$

é verdadeira ou falsa? Justifique.

9. Dê exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que não seja contínua em $x = 1$, mas que $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$.

10. Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x+1}}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$

(c) $\displaystyle\lim_{h\to 1} \frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x^2-1}$