

Lista 2
Geometria Riemanniana – SMA5947
Prof. Fernando Manfio

Assunto: Transporte paralelo

1. Sejam X e Y campos vetoriais numa variedade diferenciável M , munida de uma conexão afim ∇ . Dados um ponto $p \in M$ e um vetor $v \in T_p M$, considere uma curva diferenciável $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = X(p)$. Prove que

$$(\nabla_X Y)(p) = \frac{d}{dt} \left(P_{t,0}^\gamma(Y(\gamma(t))) \right) \Big|_{t=0},$$

onde $P_{t,0}^\gamma$ denota o transporte paralelo ao longo de γ , de t a 0.

2. Seja $(M, \langle, \rangle)$ uma variedade Riemanniana. Uma conexão afim ∇ em M é dita ser *compatível* com a métrica $\langle, \rangle$ se, para toda curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow M$ e quaisquer pares de campos vetoriais paralelos X e Y ao longo de γ , tivermos $\langle X, Y \rangle = \text{const.}$

(a) Prove que ∇ é compatível com a métrica $\langle, \rangle$ se, e somente se, para todo par X e Y de campos vetoriais ao longo da curva γ tem-se

$$\frac{d}{dt} \langle X, Y \rangle = \left\langle \frac{DX}{dt}, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{DY}{dt} \right\rangle, \quad t \in I.$$

(b) Conclua, daí, que ∇ é compatível com a métrica se, e somente se,

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.