Lista 2
Cálculo I – SMA0353
Prof. Fernando Manfio

Assunto: Introdução à continuidade

1. Prove, pela definição, que as seguintes funções são contínuas no ponto dado.

(a) $f(x) = 4x - 3$, $p = 2$,

(b) $f(x) = x^2$, $p = 1$,

(c) $f(x) = \sqrt{x}$, $p = 0$,

2. Prove que $f(x) = \frac{1}{x}$ é uma função contínua.

3. Dê exemplo de uma função definida em $\mathbb{R}$ e que seja contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$, exceto em $-1, 0, 1$.

4. Estude a continuidade da função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x < 1 \\ x + 1, & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

no ponto $x = 1$.

5. Sabe-se que f é contínua em 2 e que $f(2) = 8$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$

$$|x - 2| < \delta \Rightarrow f(x) > 7.$$

6. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ e suponha que existe $M > 0$ tal que $|f(x) - f(p)| \leq M|x - p|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que f é contínua em p.

7. Sejam f e g funções definidas em $\mathbb{R}$ e suponha que exista uma constante $M > 0$ tal que $|f(x) - f(p)| \leq M|g(x) - g(p)|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que se g for contínua em p então f também é contínua em p.

8. Seja f uma função definida e contínua em $\mathbb{R}$ e que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{Q}$. Prove que $f(x) = 0$ para todo x real.

9. Determine L para que a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2}, & \text{se} \quad x \neq 2, \\ L, & \text{se} \quad x = 2, \end{cases}$$

seja contínua no ponto $p = 2$. Justifique.

10. A função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x + 1}, & \text{se} \quad x \neq -1, \\ 2, & \text{se} \quad x = -1, \end{cases}$$

é contínua em $p = -1$? E no ponto $p = 0$? Justifique.

11. Considere um número inteiro $n \geq 1$. Se n é par, definimos a função $f(x) = \sqrt[n]{x}$ como sendo o único número real $y \geq 0$ tal que $y^n = x$. Disso decorre que $Dom(f) = \mathbb{R}_+$. Se n é ímpar, definimos $f(x) = \sqrt[n]{x}$ como sendo o único número real y tal que $y^n = x$. Nesse caso, tem-se $Dom(f) = \mathbb{R}$. Prove que, para qualquer $n \geq 1$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é contínua em todos os pontos $p \in Dom(f)$.