

Lista 1
Geometria Riemanniana – SMA5947
Prof. Fernando Manfio

Assunto: Métricas Riemannianas

1. Sejam $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ o *catenoide*, que é a superfície gerada pela rotação em torno do eixo z da curva $x = \cosh z$, e $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^3$ o *helicóide*, que é a superfície gerada por retas paralelas ao plano xy que interceptam o eixo z e a hélice $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$.

- (a) Mostre que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{H}$ são superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$ escrevendo parametrizações naturais.
- (b) Seja $\langle, \rangle = dx^2 + dy^2 + dz^2$ a métrica usual de $\mathbb{R}^3$. Mostre que $(\mathcal{C}, \langle, \rangle|_{\mathcal{C}})$ e $(\mathcal{H}, \langle, \rangle|_{\mathcal{H}})$ são superfícies localmente isométricas.

2. Mostre que o produto Riemanniano da semirreta $(0, +\infty)$ com a esfera $\mathbb{S}^n$ é isométrico ao cilindro

$$C = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1 \text{ e } x_0 > 0\}.$$

3. Considere o espaço hiperbólico real $(\mathbb{H}^n, g)$, onde g é a métrica induzida do produto interno Lorentziano de $\mathbb{R}^{n+1}$, e seja D^n o disco aberto unitário de $\mathbb{R}^n$, mergulhado em $\mathbb{R}^{n+1}$ como

$$D^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1 \text{ e } x_0 = 0\}.$$

Defina uma aplicação $f: \mathbb{H}^n \rightarrow D^n$ pondo $f(x)$ como sendo o único ponto de D^n pertencente à reta que liga os pontos $x \in \mathbb{H}^n$ e $(-1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

- (a) Prove que f é um difeomorfismo.
- (b) Fazendo $g_1 = (f^{-1})^*g$, prove que

$$g_1(x, x) = \frac{4}{(1 - \langle x, x \rangle)^2} (dx_1^2 + \dots + dx_n^2),$$

onde $x = (0, x_1, \dots, x_n) \in D^n$. Conclua que $\mathbb{H}^n$ é conformemente plano. O espaço (D^n, g_1) é usualmente chamado o *modelo do disco de Poincaré* de $\mathbb{H}^n$.

4. Considere o disco unitário $D^n \subset \mathbb{R}^n$ munido da métrica g_1 , como no Exercício 3. Prove que a inversão de $\mathbb{R}^n$ sobre a esfera centrada em $(-1, 0, \dots, 0)$ e raio $\sqrt{2}$ define um difeomorfismo h entre D^n e o semi-espaço superior

$$\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0\}.$$

Além disso, prove que a métrica $g_2 = (h^{-1})^*g_1$ é dada por

$$g_2(x, x) = \frac{1}{x_1^2} (dx_1^2 + \dots + dx_n^2),$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$. O espaço $(\mathbb{R}_+^n, g_2)$ é usualmente chamado o *modelo do semi-espaço superior de Poincaré* de $\mathbb{H}^n$.

5. Usando partição da unidade, prove que toda variedade diferenciável admite métrica Riemanniana.

6. Prove que as isometrias da esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, munida da métrica induzida, são as restrições das aplicações lineares ortogonais.