

Lista 1
Cálculo I – SMA0353
Prof. Fernando Manfio

Assunto: Pré-cálculo

1. Um número inteiro n é *par* se pode ser escrito na forma $n = 2k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$; n é *ímpar* se pode ser escrito na forma $n = 2k + 1$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Prove que:

1. Se $n \in \mathbb{Z}$ é tal que n^2 é par então n também é par.
2. Se $n \in \mathbb{Z}$ é tal que n^2 é ímpar então n também é ímpar.

2. Prove que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Prove também que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

3. Prove que se $x \in \mathbb{Q}$ e $y \notin \mathbb{Q}$, então $x + y \notin \mathbb{Q}$.

4. O produto de um racional diferente de zero com um irracional é racional ou irracional? Justifique.

5. Prove a seguinte propriedade:

$$(-1) \cdot (-1) = 1.$$

Conclua daí que $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$.

6. Dados dois números reais positivos, a e b , chama-se *média aritmética* entre a e b o número real $A = \frac{a+b}{2}$, e chama-se *média geométrica* entre a e b o número real $G = \sqrt{a \cdot b}$. Prove que $G \leq A$, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}_+$.

7. A afirmação

$$x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

é verdadeira ou falsa? Justifique.

8. Prove as seguintes propriedades a respeito do módulo dos números reais:

- (a) $|x|^2 = x^2$,
- (b) $-|x| \leq x \leq |x|$,
- (c) $|x + y| \leq |x| + |y|$,
- (d) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,
- (e) Se $a > 0$, então $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$,
- (f) $|x| = \sqrt{x^2}$,

quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}$.