Gabarito Lista 9

1. a) A derivada é dada por $f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$. Assim, $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -1) \cup (-1/3, \infty)$ e $f'(x) < 0$ para $x \in (-1, -1/3)$. Assim, $f(x)$ é crescente em $(-\infty, -1) \cup (-1/3, \infty)$ e decrescente em $(-1, -1/3)$.

b) A derivada é dada por

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Como $f'(x) > 0$ se $x > 0$ e $f'(x) < 0$ se $x < 0$, segue que f é crescente para $x \in (0, \infty)$ e decrescente para $x \in (-\infty, 0)$.

2. A derivada é dada por $f'(x) = 3x^2 - 6x$, logo $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ e $f'(x) < 0$ para $x \in (0, 2)$. Assim, a função f cresce até $x = 0$, e nesse ponto vale $f(0) = 6$. Em seguida, decresce até $x = 2$, onde vale $f(2) = 2$. Por fim, volta a crescer quando $x > 2$. Isso significa que $f(x) > 0$ para todo $x \geq 0$. E, como é contínua e crescente para $x < 0$, possui no máximo um zero no intervalo $(-\infty, 0)$. Calculando alguns valores, temos $f(-1) = 2$ e $f(-2) = -14$. Logo, f possui sua única raíz no intervalo $(-2, -1)$.

3. Calculando a derivada, temos que $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$, logo $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -5/3) \cup (1, \infty)$ e $f'(x) < 0$ para $x \in (-5/3, 1)$. Assim, a função f cresce até $x = -5/3$, onde vale $f(-5/3) = 202/27 > 0$. Depois, a função até decresce até $x = 1$ onde vale $f(1) = -2$. Por fim, para $x > 1$ a função volta a crescer.
Como $f(-5/3) > 0$ e $f(1) < 0$, O TVI nos diz que a função possui pelo menos uma raíz no intervalo $(-5/3, 1)$. Usando que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ e que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, obtemos pelo TVI que f possui pelo menos uma raíz em $(-\infty, -5/3)$ e ao menos uma em $(1, \infty)$.
Por outro lado, como a função é monótona em cada dos intervalos $(-\infty, -5/3), (-5/3, 1), (1, \infty)$, segue que possui no máximo uma raíz em cada um. Logo, possui exatamente uma raíz em cada intervalo, totalizando três raízes: uma em $(-\infty, -5/3)$, uma em $(-5/3, 1)$ e uma em $(1, \infty)$.

4. Defina a função auxiliar $h(x) := f(x) - g(x)$. Derivando, obtemos $h'(x) = f'(x) - g'(x)$. Como $f'(x) < g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, temos que $h'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$. Isto é, $h(x)$ é uma função estritamente decrescente. Como $h(c) = f(c) - g(c) = 0$, segue que $h(x) > 0$ para $x \in (a, c)$ e $h(x) < 0$ para $x \in (c, b)$. Logo, para $x \in (a, c)$ teremos $f(x) - g(x) > 0$, portanto $f(x) > g(x)$, e para $x \in (c, b)$ teremos $f(x) - g(x) < 0$, portanto $f(x) < g(x)$.

5. a) A segunda derivada é $f''(x) = 6x + 6$. O ponto de inflexão é dado por $x = -1$, pois, $f''(x) = 0$ se e só se $x = -1$. Ademais, $f''(x) < 0$ se $x < -1$ e $f''(x) > 0$ se $x > -1$, portanto a função tem concavidade para baixo se $x \in (-\infty, -1)$ e concavidade para cima se $x \in (-1, \infty)$.

b) A segunda derivada é $f''(x) = -\frac{2x}{9(x^2-x^3)^{5/3}}$. Essa função não está definida em $x = 0$ nem em $x = 1$. Logo, os pontos de inflexão são $x = \{0, 1\}$. Além disso, $f''(x) < 0$ para $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ e $f''(x) > 0$ para $x \in (1, \infty)$. Logo, a função $f(x)$ possui concavidade para cima se $x \in (1, \infty)$ e concavidade para baixo se $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$.

6. Um certo ponto x será ponto de inflexão se $f''(x) = 20x^3 + 12bx^2 + 6cx = 0$. Logo, para que 1 seja ponto de inflexão, é necessário que

$$6b + 3c = -10.$$

7. a) A derivada é dada por $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, e $f'(x) = 0$ se e só se $x = \{-1, 1\}$. Logo, os únicos pontos críticos são $x = \{-1, 1\}$. Além disso, $f'(x) > 0$ para $x \in (-1, 1)$ e $f'(x) < 0$ para $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Ou seja, a função f decresce no intervalo $(-\infty, -1)$, depois cresce no intervalo $(-1, 1)$ e volta a decrescer no intervalo $(1, \infty)$. Portanto $x = -1$ é um mínimo local e $x = 1$ é um máximo local. Ademais, como $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $f(1) = 1/2$ e $f(-1) = -1/2$, segue que $x = -1$ é um mínimo global e $x = 1$ é máximo global.

b) A derivada $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0$ se e só se $x \in \{1, 2\}$. Ademais, $f'(x) < 0$ para $x \in (1, 2)$ e $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$. Ou seja, a função f cresce no intervalo $(-\infty, 1)$, depois decresce no intervalo $(1, 2)$ e volta a crescer no intervalo $(2, \infty)$. Portanto, $x = 1$ é máximo local e $x = 2$ é mínimo local. Como $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, os pontos $\{1, 2\}$ não são extremos globais.

c) A derivada $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0$ se e só se $x \in \{0, 1, 2\}$. Ademais, $f'(x) < 0$ para $x \in (-\infty, 0) \cup (1, 2)$ e $f'(x) > 0$ para $x \in (0, 1) \cup (2, \infty)$. Ou seja, a função f decresce no intervalo $(-\infty, 0)$, depois cresce no intervalo $(0, 1)$, depois decresce no intervalo $(1, 2)$ e volta a crescer no intervalo $(2, \infty)$. Portanto, $x = \{0, 2\}$ são mínimos locais, e $x = 1$ é máximo local. Como $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $x = 1$ não é máximo global.

d) A derivada $f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x = 0$ se e só se $x = \pi/4$. Além disso, $f'(x) > 0$ se $x \in [0, \pi/4)$ e $f'(x) < 0$ se $x \in (\pi/4, \pi]$. Portanto, f é crescente em $(0, \pi/4)$ e decrescente em $(\pi/4, \pi)$. Logo, $x = \pi/4$ é um máximo local. Ademais, como $f(0) = 1$ e $f(\pi) = -1$, segue que $x = \pi$ é um mínimo global e $x = \pi/4$ é um máximo global.