Gabarito Lista 6

1. TVI

1.

2.

3.

4.

5.

2. Exponencial

6.

7. a) ∞
b) 0
c) $-\infty$
d) 0
e) ∞

8. a) e^2
b) e
c) 1
d) e^2
e) e^2
f) 2
g) 0
h) $+\infty$

9. a) 2
b) $-\frac{1}{2}$
c) 5

10. a) (-1, ∞)
b) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
c) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

11. a) ◦ **Se** $a > 1$: $\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = \infty$. De fato, perceba que

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{\log(a)},$$

onde $\log(a)$ possui sinal positivo para $a > 1$.

- **Se** $a < 1$: $\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = -\infty$. Isso segue do mesmo raciocínio acima, mas usando que $\log(a)$ possui sinal negativo para $a < 1$.

b)
- **Se** $a > 1$: $\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty$. De fato,
$$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x)}{\log(a)},$$
onde $\log(a)$ possui sinal positivo para $a > 1$ e $\log(x) \to -\infty$ quando $x \to 0^+$.
- **Se** $a < 1$: $\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = \infty$. Isso segue do mesmo raciocínio acima, mas usando que $\log(a)$ possui sinal negativo para $a < 1$ e $\log(x) \to -\infty$ quando $x \to 0^+$.

12. a) 0
b) $\log 2$
c) $\log 2$

13. Seja $t = a^h - 1$. Logo, $a^h = t + 1$. Aplicando o logaritmo neperiano dos dois lados da equação, obtemos
$$\begin{aligned} \ln a^h &= \ln(t+1) \\ h \ln a &= \ln(t+1) \\ h &= \frac{\ln(t+1)}{\ln(a)}. \end{aligned}$$
Perceba que quando $h \to 0$, temos $a^h \to 1$ e, consequentemente, $t \to 0$. Assim,
$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} &= \lim_{t\to 0} \frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln(a)}} \\ &= \ln(a) \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(t+1)} \\ &= \ln(a) \lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{\ln(t+1)}{t}} \\ &= \ln(a) \frac{\lim_{t\to 0} 1}{\lim_{t\to 0} \ln[(t+1)^{1/t}]} \\ &= \ln(a) \frac{1}{\ln e} = \ln(a). \end{aligned}$$