Capítulo 1

Subvariedades Euclidianas

As técnicas do cálculo, que tem suas origens no final do século XVII com Newton e Leibniz, transformaram a Geometria. Os objetos, que até então eram tratados com uma abordagem mais axiomática, ganharam nova perspectiva com o advento do cálculo diferencial e integral.

A geometria diferencial de superfícies no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$, por exemplo, tem dois grandes aspectos. Um deles, que está ligado diretamente às origens do cálculo, diz respeito as propriedades locais das superfícies, ou seja, aquelas propriedades que dependem somente do comportamento da superfície na vizinhança de um ponto. O segundo aspecto diz respeito em como as propriedades locais de uma superfície influenciam no seu comportamento como um todo.

Neste capítulo iremos apenas introduzir e destacar algumas das propriedades locais das subvariedades Euclidianas em $\mathbb{R}^n$, que são generalizações direta das superfícies em $\mathbb{R}^3$ estudadas nos cursos clássicos de geometria diferencial. Esses objetos serão revisitados no capítulo seguinte, no sentido de que são os exemplos naturais de uma classe mais ampla, as variedades diferenciáveis. O objetivo aqui é apenas destacar que, com o auxílio dos teoremas clássicos do cálculo, como os teoremas da aplicação inversa e implícita, as subvariedades Euclidianas admitem descrições e caracterizações simples. Maiores detalhes podem ser encontrados em E. Lima [**?**], para os resultados do cálculo, e as referências clássicas de geometria diferencial M. do Carmo [**?**], M. Berger - B. Gostiaux [**?**] ou J. Lee [**?**].

1.1 Subvariedades Euclidianas

Nesta seção estudaremos o conceito de subvariedade em $\mathbb{R}^n$. De forma intuitiva, subvariedades em $\mathbb{R}^n$ são subconjuntos localmente homeomorfos a algum espaço Euclidiano que, em cada ponto, está bem definida uma estrutura de espaço tangente.

Definição 1.1.1. Uma *subvariedade Euclidiana* de *dimensão* m em $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto M tal que, para todo ponto $p \in M$, existem um aberto V de $\mathbb{R}^n$, com $p \in V$, e um homeomorfismo $\varphi : U \to M \cap V$, definido num aberto U de $\mathbb{R}^m$, que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) φ é uma aplicação diferenciável,

(b) a diferencial $\mathrm{d}\varphi(x)$ é injetora em todo ponto $x \in U$.

A aplicação φ é chamada uma *parametrização* para a subvariedade Euclidiana M, o subconjunto $M \cap V$ é uma *vizinhança coordenada* de M em torno do ponto p e o número $n - m$ é a *codimensão* da subvariedade M em $\mathbb{R}^n$. No caso particular em que $n - m = 1$, M é usualmente chamada uma *hipersuperfície* de $\mathbb{R}^n$. Além disso, no caso em que $m = 1$, M é simplesmente uma curva diferenciável em $\mathbb{R}^n$.

Na Definição 1.1.1 estamos considerando M com a topologia induzida de $\mathbb{R}^n$. Assim, toda subvariedade Euclidiana é, em particular, uma variedade topológica. Além disso, a condição de $\mathrm{d}\varphi(x)$ ser injetora equivale ao conjunto $\{\mathrm{d}\varphi(x) \cdot e_i : 1 \leq i \leq m\}$ ser linearmente independente ou, de forma equivalente, a matriz Jacobiana $\mathrm{d}\varphi(x)$ ter posto m.

A fim de reduzir a notação e simplificar os enunciados, uma subvariedade Euclidiana M de dimensão m em $\mathbb{R}^n$ será denotada simplesmente por M^m, ficando subentendido que M é sempre subconjunto de algum espaço Euclidiano. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.1.2. Qualquer subespaço vetorial E de dimensão m em $\mathbb{R}^n$ é uma subvariedade Euclidiana de dimensão m em $\mathbb{R}^n$. De fato, considere um isomorfismo linear $T : E \to \mathbb{R}^m$. Munimos E da única topologia, induzida de $\mathbb{R}^n$, que torna T um homeomorfismo. Como toda aplicação linear em $\mathbb{R}^n$ é diferenciável, concluímos que T é um difeomorfismo e, portanto, uma parametrização global para E.

Exemplo 1.1.3. Consideremos a esfera unitária $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$. Se $N = (0, \ldots, 0, 1)$ é o polo norte de $\mathbb{S}^n$, seja $\pi_N : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ a projeção estereográfica. Geometricamente, $\pi_N(x)$ é o ponto em que a semirreta de

$\mathbb{R}^{n+1}$, com origem em N e passando pelo ponto $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$, intercepta o hiperplano $x_{n+1} = 0$. Os pontos dessa semirreta são da forma $N + t(x - N)$, com $t \geq 0$. Este ponto está no hiperplano $x_{n+1} = 0$ se, e somente se, $1 + t(x_{n+1} - 1) = 0$, onde $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$. Assim, $t = \frac{1}{1 - x_{n+1}}$ e, portanto,

$$\pi_N(x) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n, 0). \tag{1.1}$$

A expressão em (1.1) mostra que π_N é contínua. Por outro lado, considere a aplicação $\varphi_N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ definida por

$$\varphi_N(x) = \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \ldots, \frac{2x_n}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right),$$

para todo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Tem-se φ_N contínua,

$$\varphi_N \circ \pi_N = id \quad \text{e} \quad \pi_N \circ \varphi_n = id,$$

ou seja, φ_N é um homeomorfismo. Além disso, φ_N é diferenciável, e o leitor pode verificar que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, a diferencial $\mathrm{d}\varphi_N(x)$ é injetora. Concluímos, assim, que a inversa da projeção estereográfica é uma parametrização para a vizinhança coordenada $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$. De forma análoga, podemos considerar a inversa da projeção estereográfica π_S relativa ao polo sul $S = (0, 0, \ldots, -1)$ de $\mathbb{S}^n$ mostrando que $\mathbb{S}^n$ é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Nos dois exemplos a seguir discutiremos as subvariedades Euclidianas de dimensão máxima e mínima.

Exemplo 1.1.4. Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma subvariedade Euclidiana de dimensão 0 se, e somente se, para todo $p \in M$, existem um aberto V de $\mathbb{R}^n$, com $p \in V$, e uma parametrização $\varphi : U \to M \cap V$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^0 = \{0\}$. Assim, devemos ter $U = \{0\}$ e $M \cap V = \{p\}$. Portanto, $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma subvariedade de dimensão 0 se, e somente se, M é um conjunto discreto.

Exemplo 1.1.5. Todo subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma subvariedade Euclidiana de dimensão n em $\mathbb{R}^n$, imagem da única parametrização $id : U \to U$. Reciprocamente, seja M uma subvariedade Euclidiana de dimensão n em $\mathbb{R}^n$. Assim, para todo $p \in M$, existem um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, com $p \in V$, e um homeomorfismo $\varphi : U \to M \cap V$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Pelo teorema da invariância do domínio (cf. Apêndice 1), segue que a vizinhança coordenada $M \cap V$ é aberta em $\mathbb{R}^n$. Portanto, o conjunto M, reunião das vizinhanças coordendas $M \cap V$, é aberto em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.1.6. O gráfico de uma aplicação diferenciável $f : U \to \mathbb{R}^{n-m}$, definida num aberto U de $\mathbb{R}^m$, é uma subvariedade Euclidiana de dimensão m em $\mathbb{R}^n$. De fato, denotando por $\mathrm{Gr}(f)$ o gráfico de f, mostremos que a aplicação $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, dada por $\varphi(x) = (x, f(x))$, é uma parametrização global para $\mathrm{Gr}(f)$. Como f é diferenciável, o mesmo ocorre com φ. Cada ponto $(x, f(x)) \in \mathrm{Gr}(f)$ é imagem através de φ do único ponto $x \in U$, logo φ é injetora. Além disso, a restrição ao gráfico de f da projeção de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^m$ é uma inversa para φ, mostrando que φ^{-1} também é contínua. Disso decorre que φ é um homeomorfismo. Finalmente, como $\mathrm{d}\varphi(x)$ tem posto m em todos os pontos $x \in U$, segue que φ é uma imersão.

O resultado seguinte é uma recíproca local para o Exemplo 1.1.6.

Teorema 1.1.7. *Toda subvariedade Euclidiana de dimensão m em $\mathbb{R}^n$ é, localmente, o gráfico de uma aplicação diferenciável. Mais precisamente, dado um ponto p da subvariedade M, existem abertos $Z \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$, com $p \in V$, e uma aplicação diferenciável $f : Z \to \mathbb{R}^{n-m}$ tais que $M \cap V = \mathrm{Gr}(f)$.*

Demonstração. Fixado um ponto $p \in M$, considere uma parametrização $\varphi : U \to \varphi(U)$ de M, com $p = \varphi(x)$. Como $E = \mathrm{d}\varphi(x)(\mathbb{R}^m)$ é um subespaço vetorial de dimensão m de $\mathbb{R}^n$, existe uma decomposição em soma direta $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$ tal que a projeção $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$ transforma E isomorficamente sobre $\mathbb{R}^m$. Considere a aplicação $\eta = \pi \circ \varphi : U \to \mathbb{R}^m$. Como $\mathrm{d}\eta(x) = \pi \circ \mathrm{d}\varphi(x)$ é um isomorfismo linear, segue do teorema da aplicação inversa que existe um aberto W de $\mathbb{R}^m$, com $x \in W \subset U$, tal que $\eta|_W : W \to \eta(W) = Z$ é um difeomorfismo. Defina

$$\xi = (\eta|_W)^{-1} : Z \to W \quad \text{e} \quad \psi = \varphi \circ \xi.$$

Temos que ψ é uma parametrização de M e $\pi \circ \psi = id$. Disso decorre que a primeira coordenada de $\psi(x)$, em relação à decomposição $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$, é x. Denote por $f(x)$ a segunda coordenada. Assim,

$$\psi(Z) = \varphi(W) = \{(x, f(x)) : x \in Z\}$$

para alguma aplicação diferenciável $f : Z \to \mathbb{R}^{n-m}$. Como φ é aberta, tem-se $\mathrm{Gr}(f) = \varphi(W) = M \cap V$, para algum aberto V de $\mathbb{R}^n$, com $p \in V$. □

Como aplicação do Teorema 1.1.7, vejamos um exemplo simples de conjunto que não é subvariedade Euclidiana.

Exemplo 1.1.8. Denotemos por M o cone de uma folha em $\mathbb{R}^3$, i.e.,

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0\}.$$

Observe inicialmente que a projeção $\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\pi(x, y, z) = (x, y)$, define um homeomorfismo entre M e $\mathbb{R}^2$. No entanto, M não é uma superfície em $\mathbb{R}^3$. De fato, caso fosse existiriam, em virtude do Teorema 1.1.7, abertos $U \subset \mathbb{R}^2$ e $V \subset \mathbb{R}^3$, com $0 \in V$, e uma função diferenciável $g : U \to \mathbb{R}$ tal que $M \cap V = \mathrm{Gr}(g)$. Observe que $M \cap V$ não pode ser um gráfico em relação a uma decomposição da forma $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}$, no qual o segundo fator seja o eixo-x ou o eixo-y. Resta então para o segundo fator da decomposição acima ser o eixo-z e, assim, $g = f|_U$, onde $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. No entanto, f não é diferenciável em $(0, 0)$.

1.2 Valores regulares

De modo geral, provar que um determinado conjunto M é uma subvariedade Euclidiana de $\mathbb{R}^n$ não é uma tarefa simples. De acordo com a Definição 1.1.1, devemos exibir parametrizações de vizinhanças de todos os pontos de M. Veremos nesta seção que, com a noção de valor regular para aplicações diferenciáveis, podemos obter outras maneiras de gerar subvariedades Euclidianas.

Seja $f : V \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável, definida no aberto V de $\mathbb{R}^m$. Um ponto $p \in V$ é chamado *ponto regular* para f se a diferencial $\mathrm{d}f(p)$ é uma aplicação linear sobrejetora. Um ponto $q \in \mathbb{R}^n$ é chamado *valor regular* para f se a pré-imagem $f^{-1}(q)$ contém apenas pontos regulares para f. Finalmente, um ponto $p \in V$ para o qual a diferencial $\mathrm{d}f(p)$ não é sobrejetora será chamado *ponto crítico* para f.

A proposição seguinte fornece condições suficientes para que uma subvariedade Euclidiana seja dada de forma implícita.

Proposição 1.2.1. Seja $f : V \to \mathbb{R}^{n-m}$ uma aplicação diferenciável, onde V é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Se $q \in \mathbb{R}^{n-m}$ é valor regular para f, com $f^{-1}(q) \neq \emptyset$, então $M = f^{-1}(q)$ é uma subvariedade Euclidiana de dimensão m em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Em virtude do Exemplo 1.1.6, é suficiente mostrar que, localmente, M é gráfico de uma aplicação diferenciável. Dado um ponto $p \in M$, com $p = (x_0, y_0)$, podemos assumir que $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$, visto que $\mathrm{d}f(p)$ é sobrejetora. Assim, pelo teorema da aplicação implícita, existem um aberto $Z = U \times W$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^m$ contendo x_0 e W é um aberto de $\mathbb{R}^{n-m}$ contendo y_0, e uma aplicação diferenciável $g : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ tais que $f(x, g(x)) = q$, para todo $x \in U$. Isso mostra que $M \cap Z = \mathrm{Gr}(g)$. $\square$

No caso em que $f^{-1}(q) = \emptyset$, então q é trivialmente um valor regular para f. Além disso, quando o contra-domínio de f é $\mathbb{R}$, então o funcional linear $\mathrm{d}f(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ou é nulo ou é sobrejetora. Neste caso, um número real c é valor regular para f se, e somente se, $\mathrm{d}f(p) \neq 0$, para todo $p \in f^{-1}(c)$.

Vejamos algumas aplicações da Proposição 1.2.1.

Exemplo 1.2.2. Considere a função diferenciável $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \langle x, x \rangle$, para todo $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Observe que a esfera unitária $\mathbb{S}^n$ pode ser dada como $\mathbb{S}^n = f^{-1}(1)$. A fim de verificar novamente que $\mathbb{S}^n$ é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$, basta mostrar que 1 é valor regular para f. De fato, para todo ponto $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ e todo vetor $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, tem-se $\mathrm{d}f(x) \cdot v = 2\langle x, v \rangle$. Isso implica que $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ é o único ponto crítico de f. Como $f(0) = 0 \neq 1$, segue a conclusão.

Lembremos que uma matriz quadrada $X \in M(n)$ é chamada *simétrica* se $X^t = X$ e *anti-simétrica* se $X^t = -X$, onde X^t denota a transposta de X. As matrizes simétricas e anti-simétricas formam subespaços vetoriais de $M(n)$, denotados por $\mathcal{S}(n)$ e $\mathcal{A}(n)$, respectivamente, tal que $M(n) = \mathcal{S}(n) \oplus \mathcal{A}(n)$.

Exemplo 1.2.3. O *grupo ortogonal* $O(n)$, definido por

$$O(n) = \{X \in M(n) : XX^t = I\},$$

é uma subvariedade Euclidiana de dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$ em $\mathbb{R}^{n^2}$. De fato, considerando a aplicação $f : M(n) \to \mathcal{S}(n)$ dada por $f(X) = XX^t$, temos que $O(n) = f^{-1}(I)$, onde I denota a matriz identidade. Assim, devemos provar que $I \in \mathcal{S}(n)$ é valor regular para f. A aplicação f é diferenciável e sua diferencial é dada por

$$\mathrm{d}f(X) \cdot H = XH^t + HX^t.$$

Finalmente, dados $X \in O(n)$ e $S \in \mathcal{S}(n)$, tome $V = \frac{1}{2}SX$. Um cálculo simples mostra que $\mathrm{d}f(X) \cdot V = S$, ou seja, $\mathrm{d}f(X)$ é sobrejetora, logo $O(n)$ é uma subvariedade Euclidiana de dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$ em $M(n) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$.

Exemplo 1.2.4. O toro T^2 em $\mathbb{R}^3$ é o subconjunto gerado pela rotação de um círculo de raio r em torno de uma reta contida no plano do círculo e a uma distância $a > r$ do centro do círculo. Por simplicidade, denotemos por $\mathbb{S}^1$ o círculo contido no plano-yz com centro no ponto $(0, a, 0)$. Assim, $\mathbb{S}^1$ é dado pela equação $(y - a)^2 + z^2 = r^2$, e os pontos do toro T^2, obtidos pela rotação de $\mathbb{S}^1$ em torno do eixo-z satisfazem a equação

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2.$$

Dessa forma, T^2 pode ser dado como $T^2 = f^{-1}(r^2)$, onde

$$f(x,y,z) = z^2 - (\sqrt{x^2+y^2} - a)^2.$$

Note que, para $(x,y) \neq (0,0)$, f é diferenciável e tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x(\sqrt{x^2+y^2} - a)}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y(\sqrt{x^2+y^2} - a)}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z.$$

Além disso,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (0,0,0) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = a \quad \text{e} \quad z = 0.$$

Disso decorre, em particular, que r^2 é valor regular para f, pois nenhum dos pontos acima pertence a T^2, mostrando que T^2 é uma superfície em $\mathbb{R}^3$.

Observação 1.2.5. A imagem inversa $f^{-1}(q)$ pode ser uma subvariedade Euclidiana sem que q seja valor regular para f. Por exemplo, considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = z^2$. Note que f é diferenciável e $f^{-1}(0)$ coincide com o plano-xy, que é uma superfície em $\mathbb{R}^3$. No entanto, o ponto $0 \in \mathbb{R}$ não é valor regular para f, pois $\mathrm{d}f(x,y,0) = 0$, para todo $(x,y,0) \in f^{-1}(0)$.

O resultado seguinte é uma recíproca local para a Proposição 1.2.1.

Teorema 1.2.6. *Toda subvariedade Euclidiana de dimensão m em $\mathbb{R}^n$ é, localmente, imagem inversa de valor regular. Ou seja, dado um ponto p da subvariedade M, existem um aberto V de $\mathbb{R}^n$, com $p \in V$, e uma aplicação diferenciável $f : V \to \mathbb{R}^{n-m}$ tais que $M \cap V = f^{-1}(0)$, onde $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$ é valor regular para f.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.1.7, existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, com $p \in V$, tal que $M \cap V = \mathrm{Gr}(g)$, onde $g : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ é uma aplicação diferenciável definida num aberto U de $\mathbb{R}^m$. Defina a aplicação $f : V \to \mathbb{R}^{n-m}$ pondo $f(x,y) = y - g(x)$. Por construção, temos $M \cap V = \mathrm{Gr}(g) = f^{-1}(0)$. Resta provar que $\mathrm{d}f(x,y)$ é sobrejetora em todo ponto $(x,y) \in f^{-1}(0)$. De fato, dados $(x,y) \in f^{-1}(0)$ e $(u,v) \in \mathbb{R}^n$, temos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f(x,y)\cdot(u,v) &= \mathrm{d}f(x,y)\cdot(u,0) + \mathrm{d}f(x,y)\cdot(0,v) \\
&= \mathrm{Id}(0) - \mathrm{d}g(x)\cdot u + \mathrm{Id}(v) - \mathrm{d}g(x)\cdot 0 \\
&= v - \mathrm{d}g(x)\cdot u.
\end{aligned}$$

Portanto, dado $v \in \mathbb{R}^{n-m}$, tem-se $\mathrm{d}f(x,y)\cdot(0,v) = v$, e isso prova que 0 é valor regular para f. $\square$

Os Teoremas 1.1.7 e 1.2.6 fornecem descrições locais para uma dada subvariedade Euclidiana, como gráfico e pré-imagem de valor regular de aplicação diferenciável, respectivamente. O teorema seguinte fornece uma forma equivalente para a Definição 1.1.1, e que será útil nas seções seguintes.

Teorema 1.2.7. *Um subconjunto M de $\mathbb{R}^n$ é uma subvariedade Euclidiana de dimensão m em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, para todo $p \in M$, existem um aberto V de $\mathbb{R}^n$, com $p \in V$, e um difeomorfismo $\xi : V \to \xi(V)$ tal que $\xi(M \cap V) = \xi(V) \cap \mathbb{R}^m$.*

Demonstração. Suponha que M seja uma subvariedade Euclidiana de dimensão m em $\mathbb{R}^n$. Dado um ponto $p \in M$, segue do Teorema 1.2.6 que existe uma aplicação diferenciável $f : Z \to \mathbb{R}^{n-m}$, definida num aberto $Z \subset \mathbb{R}^n$ contendo p, tal que $M \cap V = f^{-1}(0)$, onde $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$ é valor regular para f. Como a diferencial $\mathrm{d}f(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ é sobrejetora, o conjunto $\{\mathrm{d}f(p)\cdot e_1, \ldots, \mathrm{d}f(p)\cdot e_n\}$ gera $\mathbb{R}^{n-m}$. Assim, podemos escolher vetores $e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-m}}$ tais que o conjunto $\{\mathrm{d}f(p)\cdot e_{i_1}, \ldots, \mathrm{d}f(p)\cdot e_{i_{n-m}}\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^{n-m}$. Considere a decomposição em soma direta $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$ tal que $\mathbb{R}^{n-m} = \mathrm{span}\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-m}}\}$ e $\mathbb{R}^m$ gerado pelos demais vetores canônicos. Assim, $\mathrm{d}f(p)|_{\mathbb{R}^{n-m}}$ é um isomorfismo linear. Defina uma aplicação $\xi : Z \to \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$ pondo $\xi(x,y) = (x, f(x,y))$, para todo $(x,y) \in Z$. Temos que ξ é uma aplicação diferenciável e $\mathrm{d}\xi(p)$ é um isomorfismo. Assim, pelo teorema da aplicação inversa, existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, com $p \in V \subset Z$, tal que $\xi|_V : V \to \xi(V)$ é um difeomorfismo. Podemos supor que $\xi(V) = U \times W \subset \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$, onde W é um aberto contendo $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$. Assim,

$$\begin{aligned} (x,y) \in M \cap V \quad &\Leftrightarrow \quad \xi(x,y) = (x, f(x,y)) \\ &\Leftrightarrow \quad \xi(x,y) = (x, 0), \end{aligned}$$

ou seja, $\xi(M \cap V) = \xi(V) \cap \mathbb{R}^m$. Reciprocamente, dado um ponto $p \in M$, considere o difeomorfismo $\xi : V \to \xi(V)$ tal que $\xi(M \cap V) = \xi(V) \cap \mathbb{R}^m$. Como $\xi(V)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, o subconjunto $U = \xi(V) \cap \mathbb{R}^m$ é aberto em $\mathbb{R}^m$. Defina, então, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ pondo $\varphi = \xi|_U^{-1}$. Assim, φ é uma parametrização de M, com $\varphi(U) = M \cap V$. $\square$

1.3 O espaço tangente

Nesta seção discutiremos a noção de espaço tangente a uma subvariedade Euclidiana. Veremos que este conjunto admite uma estrutura natural de espaço vetorial, induzida do espaço Euclidiano através das parametrizações.

Seja M^m uma subvariedade Euclidiana em $\mathbb{R}^n$. Fixado um ponto $p \in M$, dizemos que um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é *tangente* a M no ponto p se existe uma curva $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, diferenciável em $t = 0$, tal que $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = v$. O conjunto de todos os vetores tangentes a M no ponto p será chamado o *espaço tangente* a M em p e será denotado por T_pM.

Exemplo 1.3.1. Se U é um subconjunto aberto de uma subvariedade Euclidiana M, então $T_pU = T_pM$, para todo $p \in U$. De fato, claramente tem-se $T_pU \subset T_pM$. Se $v \in T_pM$, existe uma curva $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, diferenciável em $t = 0$, com $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = v$. Podemos restringir o intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ de modo que $\lambda(-\epsilon, \epsilon) \subset U$, logo $v \in T_pU$. Em particular, se V é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, então $T_pV = T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$.

O objetivo agora é mostrar que T_pM é um espaço vetorial. Vejamos, inicialmente, como se comportam os espaços tangentes de duas subvariedades Euclidianas relacionadas por uma aplicação diferenciável.

Proposição 1.3.2. Seja $f : U \to V$ uma aplicação diferenciável entre os abertos $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$, e suponha que existam subvariedades Euclidianas M e N tais que $M \subset U$, $N \subset V$ e $f(M) \subset N$. Então, $\mathrm{d}f(p)(T_pM) \subset T_{f(p)}N$, para todo $p \in M$. Em particular, se f é um difeomorfismo, com $f(M) = N$, então $\mathrm{d}f(p)(T_pM) = T_{f(p)}N$, para todo $p \in M$.

Demonstração. Dados um ponto $p \in M$ e um vetor $v \in T_pM$, considere uma curva $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, diferenciável em $t = 0$, com $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = v$. A curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to N$, dada por $\alpha(t) = f(\lambda(t))$, é diferenciável em $t = 0$. Além disso, temos $\alpha(0) = f(p)$ e $\alpha'(0) = \mathrm{d}f(p) \cdot v$, ou seja, $\mathrm{d}f(p) \cdot v \in T_{f(p)}N$. Logo, $\mathrm{d}f(p)(T_pM) \subset T_{f(p)}N$. A última afirmação segue-se aplicando f^{-1} à parte já provada. $\square$

Corolário 1.3.3. O espaço tangente T_pM é um subespaço vetorial de dimensão m em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Em virtude do Teorema 1.2.7, existem um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, com $p \in V$, e um difeomorfismo $\xi : V \to \xi(V)$ tais que $\xi(M \cap V) = \xi(V) \cap \mathbb{R}^m$. Então, pela Proposição 1.3.2, temos:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\xi(p)(T_pM) &= \mathrm{d}\xi(p)(T_p(M \cap V)) = T_{\xi(p)}(\xi(V) \cap \mathbb{R}^m) \\ &= T_{\xi(p)}\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m, \end{aligned}$$

ou seja, $T_pM = \mathrm{d}\xi(p)^{-1}(\mathbb{R}^m)$ é um subespaço vetorial de dimensão m. $\square$

Corolário 1.3.4. Dado um ponto $p \in M$, considere uma parametrização $\varphi : U \to \varphi(U)$ de M, com $p = \varphi(x)$. Então, $T_pM = \mathrm{d}\varphi(x)(\mathbb{R}^m)$. Em particular, uma base para T_pM é dada por $\{\mathrm{d}\varphi(x) \cdot e_i : 1 \leq i \leq m\}$, onde $\{e_1, \ldots, e_m\}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^m$.

Demonstração. Pela Proposição 1.3.2, temos:

$$\mathrm{d}\varphi(x)(\mathbb{R}^m) = \mathrm{d}\varphi(x)(T_xU) \subset T_p\varphi(U) = T_pM.$$

Assim, em virtude do Corolário 1.3.3, segue que $T_pM = \mathrm{d}\varphi(x)(\mathbb{R}^m)$, uma vez que ambos são subespaços vetoriais de dimensão m em $\mathbb{R}^n$. $\square$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.3.5. Sejam $f : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ uma aplicação diferenciável, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, e $q \in \mathbb{R}^{n-m}$ um valor regular para f. Então, o espaço tangente a $M = f^{-1}(q)$ num ponto p é dado por $T_pM = \ker \mathrm{d}f(p)$. De fato, dado um vetor $v \in T_pM$, considere uma curva $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, diferenciável em $t = 0$, tal que $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = v$. A curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^{n-m}$, dada por $\alpha(t) = f(\lambda(t))$, é constante e igual a q, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Assim,

$$\mathrm{d}f(p) \cdot v = \mathrm{d}f(\lambda(0)) \cdot \lambda'(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \lambda)(0) = \alpha'(0) = 0,$$

ou seja, $v \in \ker \mathrm{d}f(p)$. Isso mostra que $T_pM \subset \ker \mathrm{d}f(p)$. Como ambos são subespaços vetoriais de dimensão m em $\mathbb{R}^n$, obtemos a igualdade desejada.

Exemplo 1.3.6. Uma situação particular do Exemplo 1.3.5 pode ser vista no grupo ortogonal $O(n)$. Lembre que $O(n)$ pode ser considerado como a imagem inversa $O(n) = f^{-1}(I)$ da aplicação diferenciável $f : M(n) \to \mathcal{S}(n)$ dada por $f(X) = XX^t$ (cf. Exemplo 1.2.3). Como a diferencial de f é dada por $\mathrm{d}f(X) \cdot H = XH^t + HX^t$, segue do Exemplo 1.3.5 que

$$T_IO(n) = \ker \mathrm{d}f(I) = \{H \in M(n) : H^t + H = 0\},$$

ou seja, o espaço tangente ao grupo ortogonal $O(n)$ na matriz identidade é o subespaço das matrizes anti-simétricas.

O exemplo seguinte generaliza o fato de que a reta tangente ao círculo é sempre ortogonal à direção radial.

Exemplo 1.3.7. O espaço tangente à esfera unitária $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ num ponto p é dado por

$$T_p\mathbb{S}^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle v, p \rangle = 0\}.$$

De fato, observe inicialmente que $\{p\}^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle v, p\rangle = 0\}$ é um subespaço vetorial de dimensão n em $\mathbb{R}^{n+1}$. Além disso, considere um vetor $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, com $v = \lambda'(0)$, onde $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{S}^n$ é uma curva diferenciável em $t = 0$, com $\lambda(0) = p$. Derivando a igualdade $\|\lambda(t)\| = 1$ e aplicando em $t = 0$, obtemos $\langle v, p\rangle = 0$, ou seja, $v \in \{p\}^{\perp}$. Isso mostra que $T_p\mathbb{S}^n \subset \{p\}^{\perp}$. Como $T_p\mathbb{S}^n$ também tem dimensão n, segue que $T_p\mathbb{S}^n = \{p\}^{\perp}$, e a afirmação está provada.

1.4 Mudança de coordenadas

Dado uma subvariedade Euclidiana M^m em $\mathbb{R}^n$, considere uma parametrização $\varphi : U \to M \cap V$ de M, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se W é um aberto de $\mathbb{R}^m$ e $\xi : W \to U$ é um difeomorfismo, então a aplicação

$$\varphi \circ \xi : W \to M \cap V$$

também é uma parametrização de M, denominada usualmente uma *mudança de coordenadas*. O resultado seguinte garante que esta é a única maneira de obter novas parametrizações do aberto $M \cap V$.

Dados duas parametrizações $\varphi_1 : U_1 \to M \cap V_1$ e $\varphi_2 : U_2 \to M \cap V_2$ em M, com $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, a aplicação

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(M \cap V_1 \cap V_2) \to \varphi_2^{-1}(M \cap V_1 \cap V_2) \tag{1.2}$$

é chamada a *mudança de coordenadas* entre φ_1 e φ_2. Claramente a aplicação em (1.2) é um homeomorfismo entre abertos de $\mathbb{R}^m$. No entanto, não é imediato que $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ é diferenciável, visto que φ_2^{-1} não está definida num aberto de $\mathbb{R}^n$.

O resultado seguinte fornece a diferenciabilidade da aplicação em (1.2).

Teorema 1.4.1. *Sejam $\varphi_1 : U_1 \to M \cap V_1$ e $\varphi_2 : U_2 \to M \cap V_2$ parametrizações de uma subvariedade Euclidiana M, com $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Então, a mudança de coordenadas $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$, dada em* (1.2)*, é um difeomorfismo.*

Demonstração. Fixemos um ponto $p \in M \cap V_1 \cap V_2$. Decorre do Teorema 1.2.7 que existe um difeomorfismo $\xi : V \to \xi(V)$ tal que $\xi(M \cap V) = \xi(V) \cap \mathbb{R}^m$. Como V é aberto em $\mathbb{R}^n$ e φ_1 é um homeomorfismo, existe um aberto $\widetilde{U}_1$ de $\mathbb{R}^m$, com $\varphi_1^{-1}(p) \in \widetilde{U}_1 \subset U_1$, tal que $\varphi_1(\widetilde{U}_1) \subset M \cap V$, logo $(\xi \circ \varphi_1)(\widetilde{U}_1) \subset \mathbb{R}^m$. Analogamente, existe um aberto $\widetilde{U}_2$ de $\mathbb{R}^m$, com $\varphi_2^{-1}(p) \in \widetilde{U}_2 \subset U_2$, tal que

$(\xi \circ \varphi_2)(\widetilde{U}_2) \subset \mathbb{R}^m$. Seja $W = \varphi_1(\widetilde{U}_1) \cap \varphi_2(\widetilde{U}_2)$. Assim, no aberto $\varphi_1^{-1}(W)$, tem-se:

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = \varphi_2^{-1} \circ \xi^{-1} \circ \xi \circ \varphi_1 = (\xi \circ \varphi_2)^{-1} \circ (\xi \circ \varphi_1).$$

A composta $\xi \circ \varphi_1$ é diferenciável. Além disso, como $\mathrm{d}(\xi \circ \varphi_2)(x)$ é um isomorfismo linear, segue do teorema da aplicação inversa que $\xi \circ \varphi_2$ é, possivelmente num aberto menor, um difeomorfismo. Disso decorre que $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ é diferenciável. Analogamente se prova que $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$, inversa de $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$, também é diferenciável. □

O Teorema 1.4.1 permite estender o conceito de diferenciabilidade, que até então só faz sentido quando o domínio da aplicação é um subconjunto aberto de algum espaço Euclidiano. O que faremos então é abranger aplicações entre duas subvariedades Euclidianas M^m e N^n.

Definição 1.4.2. Uma aplicação $f : M \to N$ é dita *diferenciável* no ponto $p \in M$ se existem parametrizações $\varphi : U \to \varphi(U)$ de M e $\psi : V \to \psi(V)$ de N, com $p = \varphi(x)$ e $f(\varphi(U)) \subset \psi(V)$, de modo que a aplicação

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U \to V \tag{1.3}$$

seja diferenciável no ponto $x \in U \subset \mathbb{R}^m$.

Em virtude do Teorema 1.4.1, a aplicação (1.3) está bem definida e será chamada a *representação* de f em relação às parametrizações φ e ψ.

Observação 1.4.3. No caso particular em que f é da forma $f : M^m \to \mathbb{R}^k$, segue que f é diferenciável no ponto $p \in M$ se existe uma parametrização $\varphi : U \to \varphi(U)$ de M, com $p = \varphi(x)$, tal que a aplicação

$$f \circ \varphi : U \to \mathbb{R}^k$$

é diferenciável no ponto $x = \varphi^{-1}(p)$.

Exemplo 1.4.4. Sejam M^m uma subvariedade Euclidiana em $\mathbb{R}^n$, V um aberto de $\mathbb{R}^n$, com $M \subset V$, e $f : V \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. A restrição de f a M é uma função diferenciável em M. De fato, dados um ponto $p \in M$ e uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \to \varphi(U)$, com $p \in \varphi(U)$, a função $f \circ \varphi : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável, pois é a composta de aplicações diferenciáveis em espaços Euclidianos. Como caso particular, considere a função *distância* $d : M \to \mathbb{R}$ da subvariedade M a um ponto fixado $p_0 \notin M$, ou seja, $d(p) = \|p - p_0\|$, para todo $p \in M$. Neste caso, d é uma função diferenciável pois é a restrição a M da função diferenciável $d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $d(p) = \|p - p_0\|$.

Proposição 1.4.5. Toda parametrização $\varphi : U \to \varphi(U)$ de uma subvariedade Euclidiana M^m é um difeomorfismo.

Demonstração. Da Definição 1.1.1, a aplicação $\varphi : U \to \varphi(U)$ é um homeomorfismo diferenciável. Resta mostrar que a inversa $\varphi^{-1} : \varphi(U) \to U$ é diferenciável. Escrevamos $f = \varphi^{-1}$. Note que a aplicação $f : \varphi(U) \to \mathbb{R}^m$ está definida num aberto da subvariedade M. Assim, segundo a Observação 1.4.3, devemos mostrar que, para todo $p \in \varphi(U)$, existe uma parametrização $\psi : W \to \psi(W)$ de $\varphi(U)$, com $\psi(x) = p$, tal que $f \circ \psi : W \to \mathbb{R}^m$ seja diferenciável. Basta considerar a própria parametrização $\varphi : U \to \varphi(U)$, pois $f \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ \varphi = id$ é a aplicação identidade em $\mathbb{R}^m$, que é diferenciável. □

Dado uma aplicação $f : M^m \to N^n$, diferenciável no ponto $p \in M$, a *diferencial* de f no ponto p é a transformação linear $\mathrm{d}f(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ definida do seguinte modo. Considere uma parametrização $\varphi : U \to \varphi(U)$ de M, com $p = \varphi(x)$. Dado um vetor $v \in T_pM$, temos $v = \mathrm{d}\varphi(x) \cdot w$, para algum vetor $w \in \mathbb{R}^m$. Definimos, então,

$$\mathrm{d}f(p) \cdot v = \mathrm{d}(f \circ \varphi)(x) \cdot w.$$

Devemos mostrar que $\mathrm{d}f(p)$ independe da escolha da parametrização φ. De fato, seja $\psi : V \to \psi(V)$ outra parametrização de M, com $p = \psi(y)$ e $v = \mathrm{d}\psi(y) \cdot u$. Sabemos, pelo Teorema 1.4.1, que $\psi = \varphi \circ \xi$, onde

$$\xi : \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V)) \to \psi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V))$$

é um difeomorfismo entre abertos de $\mathbb{R}^m$, com $\xi(y) = x$. Temos:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\varphi(x) \cdot w &= v = \mathrm{d}\psi(y) \cdot u = \mathrm{d}(\varphi \circ \xi)(y) \cdot u \\ &= \mathrm{d}\varphi(x) \cdot \mathrm{d}\xi(y) \cdot u. \end{aligned}$$

Como $\mathrm{d}\varphi(x)$ é injetora, segue que $\mathrm{d}\xi(y) \cdot u = w$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(f \circ \psi)(y) \cdot u &= \mathrm{d}(f \circ \varphi \circ \xi)(y) \cdot u = \mathrm{d}(f \circ \varphi)(x) \cdot \mathrm{d}\xi(y) \cdot u \\ &= \mathrm{d}(f \circ \varphi)(x) \cdot w. \end{aligned}$$

Observação 1.4.6. O vetor $v \in T_pM$ é o vetor velocidade $\lambda'(0)$ de uma curva $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, diferenciável em $t = 0$, com $\lambda(0) = p$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(p) \cdot v &= \mathrm{d}(f \circ \varphi)(x) \cdot w = \mathrm{d}(f \circ \varphi)(x) \cdot (\varphi^{-1} \circ \lambda)'(0) \\ &= (f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \lambda)'(0) = (f \circ \lambda)'(0), \end{aligned}$$

ou seja, $\mathrm{d}f(p) \cdot v$ é o vetor velocidade da curva $f \circ \lambda$ no instante $t = 0$.

Proposição 1.4.7 (Regra da cadeia)**.** Considere subvariedades Euclidianas M, N, P e aplicações $f : M \to N$ e $g : N \to P$ tais que f é diferenciável no ponto $p \in M$ e g é diferenciável no ponto $f(p)$. Então a aplicação composta $g \circ f : M \to P$ é diferenciável no ponto p e vale a regra:

$$\mathrm{d}(g \circ f)(p) = \mathrm{d}g(f(p)) \circ \mathrm{d}f(p).$$

Demonstração. Considere parametrizações $\varphi : U \to \varphi(U)$, $\psi : V \to \psi(V)$ e $\xi : W \to \xi(W)$ de de M, N e P, respectivamente, tais que $p = \varphi(x)$ e $f(p) = \psi(y)$. Como f é diferenciável em $p \in M$, segue que $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ é diferenciável em x, e como g é diferenciável em $f(p)$, $\xi^{-1} \circ g \circ \psi$ é diferenciável em y. Assim,

$$\xi^{-1} \circ (g \circ f) \circ \varphi = (\xi^{-1} \circ g \circ \psi) \circ (\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)$$

é diferenciável no ponto x, como composta de aplicações diferenciáveis entre abertos Euclidianos logo, por definição, $g \circ f$ é diferenciável em p. Para a segunda parte, temos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}g(f(p)) \circ \mathrm{d}f(p) &= \mathrm{d}(g \circ \psi)(y) \circ \mathrm{d}(f \circ \varphi)(x) \\
&= \mathrm{d}(g \circ \psi)(\psi^{-1}(f(p))) \circ \mathrm{d}(f \circ \varphi)(x) \\
&= \mathrm{d}(g \circ f \circ \varphi)(x) \\
&= \mathrm{d}(g \circ f)(p),
\end{aligned}$$

como queríamos. $\square$

1.5 Exercícios

1.1

1. Considere duas subvariedades Euclidianas $M_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ e $M_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ de dimensões m_1 e m_2, respectivamente. Prove que o produto cartesiano $M_1 \times M_2$ também é uma subvariedade Euclidiana de dimensão $m_1 + m_2$ de $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$. Conclua, em particular, que o *toro* $T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ é uma superfície de $\mathbb{R}^4$.

2. Prove que o cilindro circular reto

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}$$

é uma superfície em $\mathbb{R}^3$.

3. Prove que o helicoide

$$\mathcal{H} = \{(x \cos y, x \sin y, y) : x, y, \in \mathbb{R}\}$$

é uma superfície em $\mathbb{R}^3$.

1.2

1. Considere o *grupo linear especial*

$$\mathrm{SL}(n) = \{X \in \mathrm{GL}(n) : \det X = 1\},$$

onde $\mathrm{GL}(n)$ denota o *grupo linear*, i.e., o subconjunto aberto de $M(n)$ formado por todas as matrizes inversíveis. Usando a função determinante, prove que $\mathrm{SL}(n)$ é uma hipersuperfície de $M(n)$.

1.3

1. Mostre que o espaço tangente a $\mathrm{SL}(n)$, na matriz identidade, é o subespaço das matrizes de traço nulo.

2. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Mostre que o espaço tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ é o gráfico da diferencial $\mathrm{d}f(p) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

1.4

1. Prove que toda aplicação diferenciável $f: M \to N$, entre as subvariedades Euclidianas M e N, é contínua.

2. Se U é um aberto de uma subvariedade Euclidiana M^m, prove que a aplicação inclusão $i: U \to M$ é diferenciável.

3. Se $f: M \to N$ é uma aplicação diferenciável, prove que a restrição de f a qualquer aberto U de M também é diferenciável.

4. Considere o produto cartesiano $M = M_1 \times M_2$ das subvariedades Euclidianas M_1 e M_2.

(a) Prove que as projeções $\pi_i : M \to M_i$ são aplicações diferenciáveis.

(b) Se N é outra subvariedade Euclidiana, prove que uma aplicação $f: N \to M$ é diferenciável se, e somente se, as aplicações coordenadas $\pi_i \circ f$ são diferenciáveis, $i = 1, 2$.

5. Prove que o gráfico de uma aplicação diferenciável $f: M \to N$ é difeomorfo à subvariedade M.

6. Prove que o espaço tangente ao gráfico de uma aplicação diferenciável $f: M \to N$ em um ponto $(p, f(p))$ coincide com o gráfico da diferencial $\mathrm{d}f(p): T_pM \to T_{f(p)}N$.

7. Sejam M, N subvariedades Euclidianas em $\mathbb{R}^n$, V um aberto de $\mathbb{R}^n$, com $M \subset V$, e $f: V \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável tal que $f(M) \subset N$. Prove que a restrição $f|_M : M \to N$ é uma aplicação diferenciável. Conclua, em particular, que a aplicação *antipodal* $A: \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, dada por

$$A(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (-x_1, \ldots, -x_{n+1}),$$

é um difeomorfismo, onde $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ denota a esfera unitária.

1.6 Apêndice 1: O teorema da invariância do domínio

Um problema básico da topologia dos espaços Euclidianos é determinar se dois subconjuntos $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ são ou não homeomorfos. Não existe uma resposta geral para este problema. A fim de garantir que X e Y são homeomorfos é necessário exibir um homeomorfismo entre eles. Quando se suspeita que X e Y não são homeomorfos, a ideia é estudar invariantes topológicos, como a compacidade, a conexidade e o grupo fundamental.

Exemplo 1.6.1. Considere o intervalo fechado $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e a bola fechada $Y = B[p; r] \subset \mathbb{R}^2$. Ambos são compactos e conexos. No entanto, seja qual for o ponto $q \in Y$, o conjunto $Y \setminus \{q\}$ ainda é conexo enquanto que, para qualquer ponto $a < x < b$, o conjunto $X \setminus \{x\}$ é desconexo. Assim, se existisse um homeomorfismo $f : X \to Y$, escolheríamos um ponto $x \in (a, b)$, escreveríamos $q = f(x)$ e teríamos, por restrição, um homeomorfismo $g : X \setminus \{x\} \to Y \setminus \{q\}$, $g = f|_{X\setminus\{x\}}$, entre um conjunto conexo e um conjunto desconexo, o que é uma contradição.

Se tentarmos repetir esse raciocínio para provar que uma bola fechada $X = B[p; \delta] \subset \mathbb{R}^2$ não é homeomorfa a uma bola fechada $Y = B[q; \epsilon] \subset \mathbb{R}^3$ não chegaremos a lugar nenhum, pois X e Y permanecem conexos depois da retirada de qualquer um de seus pontos. É intuitivo que uma bola aberta de $\mathbb{R}^m$ só é homeomorfa a uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$ quando $m = n$. Isso é verdade, e a demonstração desse fato faz uso de um importante teorema de Topologia, cuja demonstração o leitor pode encontrar em [**?**, Theorem 36.5].

Teorema 1.6.2 (Invariância do domínio)**.** *Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação injetora e contínua, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Então $f(U)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e f é um mergulho.*

Corolário 1.6.3. Se uma bola aberta de $\mathbb{R}^m$ é homeomorfa a uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$, então $m = n$.

Demonstração. Como uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$ é homeomorfa a $\mathbb{R}^n$, podemos supor que as bolas abertas sejam os espaços $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$. Suponha, por absurdo, que $m > n$, e considere o homeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ entre os espaços Euclidianos. Denotando por $i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o mergulho canônico

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m,$$

obtemos um mergulho $\xi = i \circ \varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ que a cada ponto $x \in \mathbb{R}^m$ associa o ponto $\xi(x) = (\varphi(x), 0) \in \mathbb{R}^m$. No entanto, a imagem de $\mathbb{R}^m$ pelo mergulho ξ não é um aberto em $\mathbb{R}^m$, contradizendo o Teorema 1.6.2. □