Capítulo 1

1.1 A topologia de $\mathbb{R}^n$

O *espaço Euclidiano de dimensão* n, denotado por $\mathbb{R}^n$, é o produto cartesiano de n cópias de $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}.$$

Assim, os pontos de $\mathbb{R}^n$ são da forma $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, cujas coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números reais. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, com $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, e um número real α, definimos a *soma* $x + y$ e o *produto por escalar* $\alpha \cdot x$ em $\mathbb{R}^n$ pondo

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \\ \alpha \cdot x &= (\alpha \cdot x_1, \ldots, \alpha \cdot x_n). \end{aligned} \tag{1.1}$$

As operações em (1.1) tornam $\mathbb{R}^n$ um espaço vetorial real de dimensão n. Desta forma, podemos expressar qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^n$ como combinação linear

$$x = x_1 \cdot e_1 + \ldots + x_n \cdot e_n,$$

onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Uma *norma* em $\mathbb{R}^n$ é uma função real $\|\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) Se $x \neq 0$, então $\|x\| > 0$,

(ii) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. A propriedade (iii) é conhecida usualmente como a *desigualdade triangular*.

Exemplo 1.1.1. Podemos considerar várias normas em $\mathbb{R}^n$, algumas das quais de manipulação simples. Por exemplo, as normas *Euclidiana*, do *máximo* e da *soma* são definidas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2}, \\ \|x\|_M &= \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}, \\ \|x\|_S &= |x_1| + \ldots |x_n|. \end{aligned} \tag{1.2}$$

As funções em (1.2) satisfazem facilmente as condições (i) e (ii) da definição de norma. Vejamos como as normas do máximo e da soma verificam a desigualdade triangular. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se

$$\begin{aligned} \|x+y\|_M &= \max\{|x_1 + y_1|, \ldots, |x_n + y_n|\} \\ &= |x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \\ &\leq \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} + \max\{|y_1|, \ldots, |y_n|\} \\ &= \|x\|_M + \|y\|_M \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|x+y\|_S &= |x_1 + y_1| + \ldots + |x_n + y_n| \\ &\leq (|x_1| + \ldots + |x_n|) + (|y_1| + \ldots + |y_n|) \\ &= \|x\|_S + \|y\|_S. \end{aligned}$$

A desigualdade triangular para a norma Euclidiana é consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz que veremos a seguir.

Um *produto interno* em $\mathbb{R}^n$ é simplesmente uma função $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que é bilinear, simétrica e positivo definida. Um exemplo simples é o *produto interno canônico* de $\mathbb{R}^n$, o qual é definido por

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n,$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$. Neste caso, a norma Euclidiana pode ser escrita como

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. A desigualdade seguinte, conhecido como *desigualdade de Cauchy-Schwarz*, estabelece uma desigualdade fundamental em $\mathbb{R}^n$. Mais precisamente, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \tag{1.3}$$

valendo a igualdade se, e somente se, um dos vetores é múltiplo do outro.

Usando a desigualdade (1.3), podemos provar que a norma Euclidiana satisfaz a desigualdade triangular. De fato, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\ &= \big(\|x\| + \|y\|\big)^2. \end{aligned}$$

Disso decorre que $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, como queríamos.

Duas normas $\| \|_1$ e $\| \|_2$ em $\mathbb{R}^n$ são ditas *equivalentes* se existem constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\|x\|_1 \leq \alpha \|x\|_2 \quad \text{e} \quad \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1, \tag{1.4}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Note que, dado $x \in \mathbb{R}^n$, para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se

$$\begin{aligned} \|x\|_M &= |x_i| = \sqrt{x_i^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2} \\ &\leq \sqrt{x_1^2} + \ldots + \sqrt{x_n^2} = |x_1| + \ldots + |x_n| \\ &\leq n|x_i| = n\|x\|_M, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|x\|_M \leq \|x\| \leq \|x\|_S \leq n\|x\|_M. \tag{1.5}$$

Decorre das desigualdades em (1.5) que as normas Euclidiana, do máximo e da soma, dadas em (1.2), são duas a duas equivalentes.

Uma norma em $\mathbb{R}^n$ possibilita-nos definir algumas noções geométricas básicas, como veremos a seguir. Por questão de simplicidade, iremos sempre considerar a norma Euclidiana. A *bola aberta* de centro num ponto $p \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$, denotada por $B(p, r)$, é o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto p é menor do que r. Ou seja,

$$B(p, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - p\| < r\}.$$

Da mesma forma, definimos a *bola fechada* $B[p, r]$ com centro em $p \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$, pondo

$$B[p, r] = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - p\| \leq r\}.$$

Considere um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $p \in X$ chama-se um *ponto interior* de X se existe $r > 0$ tal que $B(p, r) \subset X$. O *interior* de X, denotado por $\text{int}(X)$, é o subconjunto de X formado pelos pontos interiores de X.

Definição 1.1.2. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se *aberto* em $\mathbb{R}^n$ se todos os seus pontos são interiores, ou seja, quando $\operatorname{int}(X) = X$.

Vejamos um exemplo simples de conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.1.3. Toda bola aberta $B(p, r)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$. De fato, dado um ponto $x \in B(p, r)$, tome $\delta = r - \|x - p\| > 0$. Afirmamos que $B(x, \delta) \subset B(p, r)$. De fato, dado $y \in B(x, \delta)$, temos

$$\|y - p\| \leq \|y - x\| + \|x - p\| < \delta + \|x - p\| = r.$$

Isso mostra que $y \in B(p, r)$. Como y foi escolhido de forma arbitrária em $B(x, \delta)$, mostramos que $B(x, \delta) \subset B(p, r)$ e, assim, $B(p, r)$ é aberto.

Dados um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ e um ponto $p \in \mathbb{R}^n$, existem três possibilidades excludentes: ou $p \in \operatorname{int}(X)$, ou $p \in \operatorname{int}(\mathbb{R}^n - X)$ ou então toda bola aberta de centro em p contém pontos de X e $\mathbb{R}^n - X$. Os pontos com esta propriedade constituem a *fronteira* ∂X de X. Assim, X é aberto em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, $X \cap \partial X = \emptyset$.

Dado uma família arbitrária $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, valem as igualdades

$$\mathbb{R}^n - \bigcup_\alpha F_\alpha = \bigcap_\alpha (\mathbb{R}^n - F_\alpha) \quad \text{e} \quad \mathbb{R}^n - \bigcap_\alpha F_\alpha = \bigcup_\alpha (\mathbb{R}^n - F_\alpha). \tag{1.6}$$

Usando as propriedades (1.6), pode-se provar a seguinte

Proposição 1.1.4. Os conjuntos abertos têm as seguintes propriedades:

(a) $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ são abertos.

(b) A interseção de uma coleção finita de abertos é um conjunto aberto.

(c) A união de uma família qualquer de abertos é um conjunto aberto.

A coleção de todos os conjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ constitui, segundo a Proposição 1.1.4, a *topologia usual* de $\mathbb{R}^n$, e será essa a topologia considerada em $\mathbb{R}^n$.

Exercícios

1. Mostre que, se $x, y \in \mathbb{R}^n$ são não-nulos e tais que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, então x e y são múltiplos um do outro. Além disso, mostre que isso é falso nas normas $\|\|_M$ e $\|\|_S$.

2. Uma norma $\|\|$ em $\mathbb{R}^n$ *provém* de um produto interno $\langle , \rangle$ se vale a relação $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Prove que toda norma $\|\|$ em $\mathbb{R}^n$, que provém de um produto interno, satisfaz a *identidade do paralelogramo*:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big),$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$. Conclua que as normas $\|\|_M$ e $\|\|_S$ não provêm de um produto interno.

3. Prove que quaisquer duas normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.

4. Prove que, para qualquer subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, $\mathrm{int}(X)$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$ que contém qualquer conjunto aberto contido em X.

5. Prove que o conjunto $X = \mathbb{R}^n - B[p, r]$, o complementar da bola fechada $B[p, r]$ em $\mathbb{R}^n$, é aberto em $\mathbb{R}^n$.

1.2 Aplicações contínuas

Considere uma aplicação $f\colon X \to \mathbb{R}^n$, definida num subconjunto aberto $X \subset \mathbb{R}^m$, onde temos fixado uma norma em $\mathbb{R}^m$ e outra norma em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.2.1. Dizemos que $f\colon X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é *contínua num ponto* $p \in X$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X \text{ e } \|x - p\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(p)\| < \epsilon. \tag{1.7}$$

Dizemos simplesmente que f é *contínua* se for contínua em todos os pontos do seu domínio X.

A definição de continuidade para aplicações entre espaços Euclidianos, dada na Definição 1.2.1, parte do princípio que fixemos uma norma no domínio e outra no contra-domínio. O ponto importante é que a definição não é afetada se substituirmos as normas por outras que sejam, respectivamente, equivalentes. Como quaisquer duas normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes, a Definição 1.2.1 está bem posta.

Em termos de bolas abertas, a continuidade de f no ponto $p \in X$ se exprime como sendo: para qualquer bola aberta $B(f(p), \epsilon) \subset \mathbb{R}^n$, com centro no ponto $f(p)$, existe uma bola aberta $B(p, \delta) \subset \mathbb{R}^m$, com centro em $p \in X$, tal que

$$x \in B(p, \delta) \cap X \Rightarrow f(x) \in B(f(p), \epsilon),$$

ou seja,

$$f(B(p, \delta) \cap X) \subset B(f(p), \epsilon).$$

Decorre diretamente da definição que se $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ é contínua então, para cada aberto $A \subset \mathbb{R}^m$, com $A \subset X$, a restrição $f|_A\colon A \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua. Além disso, a continuidade é um conceito local. Mais precisamente, se cada ponto $p \in X$ é centro de uma bola aberta $B(p, r)$ tal que a restrição $f|_{X \cap B(p,r)}$ é contínua, então $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ é contínua. Vejamos a seguir alguns exemplos de aplicações contínuas.

Exemplo 1.2.2. Toda aplicação linear $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua. De fato, dado $p \in \mathbb{R}^m$, temos

$$\|T(x) - T(p)\| = \|T(x - p)\| \leq \|T\| \cdot \|x - p\|,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^m$, onde $\|T\|$ denota a norma espectral em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ dada por

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in \mathbb{R}^m,\ \|x\| = 1\}.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \epsilon/\|T\|$. Portanto, todo $x \in \mathbb{R}^m$ satisfazendo $\|x - p\| < \delta$, tem-se $\|T(x) - T(p)\| < \epsilon$, mostrando que T é contínua em p.

Exemplo 1.2.3. Uma classe mais geral das aplicações lineares são as aplicações Lipschitzianas, i.e., aplicações $f\colon X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ para as quais existe uma constante $k > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|,$$

para quaisquer $x, y \in X$. Como no Exemplo 1.2.2, fixado $p \in X$ e dado $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta = \epsilon/k$. Em particular, toda aplicação $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ que é de Lipschitz em cada parte limitada de $\mathbb{R}^m$ é contínua.

Exemplo 1.2.4. Toda norma $\|\|$ em $\mathbb{R}^n$ é uma função contínua. De fato, fazendo $f(x) = \|x\|$ e fixado $p \in \mathbb{R}^n$, temos:

$$|f(x) - f(p)| = |\|x\| - \|p\|| \leq \|x - p\|,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Assim, dado $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta = \epsilon$.

Exemplo 1.2.5. Toda aplicação bilinear $\varphi\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é contínua. De fato, basta mostrar que φ é uma aplicação Lipschitziana em cada parte limitada de $\mathbb{R}^{m+n}$. Seja $\|\|_S$ a norma da soma em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{m+n}$ e denote por

$$c = \max\{\|\varphi(e_i, e_j)\| : 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n\}.$$

Dados $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$, com

$$x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i \quad \text{e} \quad y = \sum_{j=1}^{m} y_j e_j,$$

temos

$$\|x\|_S \cdot \|y\|_S = \sum_{i,j=1}^{n} |x_i| \cdot |y_j| \quad \text{e} \quad \varphi(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|\varphi(x, y)\| &\leq \sum_{i,j=1}^{n} |x_i| \cdot |y_j| \cdot \|\varphi(e_i, e_j)\| \leq c \sum_{i,j=1}^{n} |x_i| \cdot |y_j| \\
&= c \cdot \|x\|_S \cdot \|y\|_S.
\end{aligned}$$

Sejam agora $z, z' \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, com $z = (x, y)$ e $z' = (x', y')$. Temos:

$$\begin{aligned} \|\varphi(z) - \varphi(z')\| &= \|\varphi(x, y) - \varphi(x', y')\| \\ &= \|\varphi(x, y) - \varphi(x, y') + \varphi(x, y) - \varphi(x', y')\| \\ &= \|\varphi(x, y - y') + \varphi(x - x', y')\| \\ &\leq \|\varphi(x, y - y')\| + \|\varphi(x - x', y')\| \\ &\leq c \cdot \big(\|x\|_S \cdot \|y - y'\|_S + \|x - x'\|_S \cdot \|y'\|\big). \end{aligned}$$

Se $z, z' \in B[0, r] \subset \mathbb{R}^{m+n}$ tem-se, em particular, que $\|x\|_S \leq r$ e $\|y\|_S \leq r$. Assim,

$$\begin{aligned} \|\varphi(z) - \varphi(z')\| &\leq c \cdot r\big(\|x - x'\|_S + \|y - y'\|_S\big) \\ &= c \cdot r\|z - z'\|_S. \end{aligned}$$

Portanto, φ é Lipschitz em cada bola $B[0, r]$ do espaço $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, com constante de Lipschitz $c \cdot r$, logo é contínua. Em particular, o produto interno e a multiplicação de matrizes são aplicações contínuas.

Exemplo 1.2.6. As projeções $\pi_1 \colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $\pi_2 \colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dadas por $\pi_1(x, y) = x$ e $\pi_2(x, y) = y$, são contínuas pois satisfazem a condição de Lipschitz

$$\|\pi_1(x, y) - \pi_1(p, q)\| = \|x - p\| \leq \|(x, y) - (p, q)\|.$$

O resultado seguinte nos dá uma *caracterização topológica* do conceito de continuidade. Mais precisamente, podemos reescrever (1.7) em termos da noção de conjunto aberto.

Teorema 1.2.7. *Uma aplicação $f \colon X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua num ponto $p \in X$ se, e somente se, para todo aberto V de $\mathbb{R}^n$, com $f(p) \in V$, existe um aberto U de $\mathbb{R}^m$, com $p \in U \subset X$, tal que $f(U) \subset V$.*

Demonstração. Suponha f contínua em $p \in X$ e considere um aberto V de $\mathbb{R}^n$, com $f(p) \in V$. Assim, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(f(p), \epsilon) \subset V$. Como f é contínua em p, existe uma bola aberta $U = B(p, \delta) \subset X$ tal que

$$f(U) = f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \epsilon) \subset V,$$

provando a condição necessária. Reciprocamente, dado $\epsilon > 0$, considere a bola aberta $V = B(f(p), \epsilon)$. Por hipótese, existe um aberto U de $\mathbb{R}^m$, com $p \in U \subset X$, tal que $f(U) \subset V$. Sendo U aberto, existe $\delta > 0$ tal que $B(p, \delta) \subset U$. Assim,

$$f(B(p, \delta) \subset f(U) \subset V = B(f(p), \epsilon),$$

e isso mostra que f é contínua em p. □

Como consequência direta do Teorema 1.2.7, tem-se

Corolário 1.2.8. Uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua se, e somente se, para todo conjunto aberto V em $\mathbb{R}^n$, $f^{-1}(V)$ é aberto em X.

Demonstração. Observe que todo aberto V em $\mathbb{R}^n$ é um aberto que contém cada um de seus pontos. Assim, pelo Teorema 1.2.7, f é contínua se, e somente se, para cada tal aberto V, o conjunto $f^{-1}(V)$ é um aberto em X que contém todos os seus pontos, ou seja, se, e somente se, $f^{-1}(V)$ é aberto em X. □

Dados um aberto $X \subset \mathbb{R}^m$ e uma aplicação $f \colon X \to \mathbb{R}^n$, podemos escrever

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)),$$

para todo $x \in X$, onde $f_1, \ldots, f_n \colon X \to \mathbb{R}$ são as *funções coordenadas* de f definidas por $f_i = \pi_i \circ f$, para $1 \leq i \leq n$.

Proposição 1.2.9. A aplicação $f \colon X \to \mathbb{R}^n$ é contínua num ponto $p \in X$ se, e somente se, cada uma de suas funções coordenadas f_i é contínua em p.

Demonstração. Se f é contínua em $p \in X$, a continuidade das f_i decorre da regra da cadeia (cf. Exercício 1.2.1). Reciprocamente, suponha que cada $f_i \colon X \to \mathbb{R}$ seja contínua em p. Assim, dado $\epsilon > 0$, existem $\delta_1, \ldots, \delta_n > 0$ tais que

$$x \in X \text{ e } \|x - p\| < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(p)| < \epsilon.$$

Considere a norma do máximo em $\mathbb{R}^n$ e seja $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Assim, para todo $x \in X$, com $\|x - p\| < \delta$, tem-se

$$\|f(x) - f(p)\| = \max\{|f_i(x) - f_i(p)| : 1 \leq i \leq n\} < \epsilon,$$

provando que f é contínua em p. □

Um *homeomorfismo* entre dois abertos $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ é uma bijeção contínua $f \colon X \to Y$, cuja inversa $f^{-1} \colon Y \to X$ também é contínua. Neste caso, dizemos que X e Y são *abertos homeomorfos*.

É intuitivo esperar que uma bola aberta de $\mathbb{R}^m$ só é homeomorfa a uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$ quando $m = n$. Isso é verdade, e a demonstração desse fato faz uso de um importante teorema de Topologia, cuja demonstração o leitor pode encontrar em [3, Theorem 36.5].

Teorema 1.2.10 (Invariância do domínio)**.** *Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação injetora e contínua, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Então $f(U)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e f é um mergulho.*

Corolário 1.2.11. Se uma bola aberta de $\mathbb{R}^m$ é homeomorfa a uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$, então $m = n$.

Demonstração. Como uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$ é homeomorfa a $\mathbb{R}^n$, podemos supor que as bolas abertas sejam os espaços $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$. Suponha, por absurdo, que $m > n$, e considere o homeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ entre os espaços Euclidianos. Denotando por $i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o mergulho canônico

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m,$$

obtemos um mergulho $\xi = i \circ \varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ que a cada ponto $x \in \mathbb{R}^m$ associa o ponto $\xi(x) = (\varphi(x), 0) \in \mathbb{R}^m$. No entanto, a imagem de $\mathbb{R}^m$ pelo mergulho ξ não é um aberto em $\mathbb{R}^m$, contradizendo o Teorema 1.2.10. $\square$

Exercícios

1. Prove que a composta de duas aplicações contínuas também é contínua. Ou seja, dados dois abertos $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$, e duas aplicações $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ e $g\colon Y \to \mathbb{R}^k$, sendo f contínua num ponto $p \in X$, $f(X) \subset Y$ e g contínua em $f(p)$, então a composta $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}^k$ é contínua em p.

2. Dados $a, \lambda \in \mathbb{R}$, com $\lambda \neq 0$, considere a translação $T_a\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e a homotetia $H_\lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dadas por

$$T_a(x) = x + a \quad \text{e} \quad H_\lambda(x) = \lambda \cdot x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Prove que T_a e H_λ são contínuas.

3. Prove que quaisquer duas bolas abertas em $\mathbb{R}^n$ são homeomorfas.

4. Prove que toda bola aberta em $\mathbb{R}^n$ é homeomorfa ao espaço $\mathbb{R}^n$.

1.3 Subespaços topológicos

O espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, considerado como espaço topológico, é uma união de conjuntos abertos, essenciais para o conceito de continuidade. No entanto, as vezes se faz necessário considerar aplicações definidas em certos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que não são necessariamente abertos. Além disso, a fim de se discutir continuidade de tais aplicações, precisamos munir tais subconjuntos de uma topologia.

Denotemos por τ a coleção de todos os subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$, segundo a Definição 1.1.2. Como vimos na Proposição 1.1.4, tal coleção define uma topologia em $\mathbb{R}^n$, conhecida como a *topologia usual* de $\mathbb{R}^n$. Se X é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, a coleção

$$\tau_X = \{X \cap U : U \in \tau\}$$

define uma topologia em X, chamada a *topologia induzida*. Com esta topologia, X é chamado um *subespaço topológico* de $\mathbb{R}^n$; os conjuntos abertos de X consistem de todas as interseções dos abertos de $\mathbb{R}^n$ com X. Deixamos a cargo do leitor verificar que τ_X é uma topologia.

Exemplo 1.3.1. Considere o intervalo fechado $[0,1]$ como subconjunto da reta real $\mathbb{R}$, munida da topologia usual. O intervalo $(1/2,1]$ é aberto em $[0,1]$ mas não é aberto em $\mathbb{R}$, pois $(1/2,1] = [0,1] \cap (1/2,2)$.

Considere agora dois subespaços topológicos $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$.

Definição 1.3.2. Uma aplicação $f\colon X \to Y$ é dita ser *contínua* se para cada aberto V de Y, o conjunto $f^{-1}(V)$ é um subconjunto aberto de X.

Todas as propriedades das aplicações conínuas entre abertos do espaço Euclidiano continuam válidas neste contexto. Apresentamos a seguir apenas algumas delas, que serão usadas ao longo do texto.

Proposição 1.3.3. Se X é um subespaço topológico de $\mathbb{R}^n$, então inclusão $i\colon X \to \mathbb{R}^n$ é contínua.

Demonstração. Se U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, então $i^{-1}(U) = X \cap U$, que é aberto em X pela definição de topologia induzida. □

Proposição 1.3.4. Sejam X, Y, X subespaços topológicos de espaços Euclidianos. Se $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ são aplicações contínuas, a composta $g \circ f\colon X \to Z$ também é contínua.

Demonstração. Se U é aberto em Z, então $g^{-1}(U)$ é aberto em Y e $f^{-1}(g^{-1}(U))$ é aberto em X. Porém,

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U),$$

provando que $g \circ f$ é contínua. □

Proposição 1.3.5. Seja $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua.

(a) Se X é um subespaço de $\mathbb{R}^m$, então a aplicação restrição $f|_X\colon X \to \mathbb{R}^n$ é contínua.

(b) Se V é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ contendo a imagem $f(\mathbb{R}^m)$ de f, então a aplicação restrição de f ao contradomíno V é contínua.

Demonstração. Para o item (a), note que a aplicação $f|_X$ é igual a composta da inclusão $i\colon X \to \mathbb{R}^m$ e a aplicação $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, ambas contínuas. Para o item (b), seja $g\colon \mathbb{R}^m \to V$ a aplicação obtida pela restrição de f ao contradomíno V e considere um aberto B em V. Assim, $B = V \cap W$, para algum aberto W de $\mathbb{R}^n$. Como V contém o conjunto imagem $f(\mathbb{R}^m)$, tem-se

$$f^{-1}(W) = g^{-1}(B).$$

Como $f^{-1}(W)$ é aberto, assim o é o conjunto $g^{-1}(B)$. □

Exemplo 1.3.6. Dados três números positivos a, b e c, considere o elipsoide

$$\mathcal{E} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\} \tag{1.8}$$

como subespaço topológico de $\mathbb{R}^3$. Se $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ denota a projeção $\pi(x,y,z) = (x,y)$, então a restrição $\pi|_{\mathcal{E}}$ é uma aplicação contínua do elipsoide $\mathcal{E}$ sobre o plano $\mathbb{R}^2$.

Uma aplicação $f\colon X \to Y$, entre os subespaços $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$, é dita ser um *homeomorfismo* se f é uma bijeção contínua, cuja inversa $f^{-1}\colon Y \to X$ também é contínua.

Exemplo 1.3.7. A aplicação $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x,y,z) = (ax, by, cz)$$

é contínua como aplicação entre espaços Euclidianos. A restrição de f à esfera

$$\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

é uma aplicação contínua $g\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$. Note que $g(\mathbb{S}^2) = \mathcal{E}$, onde $\mathcal{E}$ é o elipsoide dado em (1.8). Note também que f é injetora e que

$$f^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right).$$

Assim, $g^{-1} = f^{-1}|_{\mathcal{E}}$ é contínua. Portanto, g é um homeomorfismo da esfera $\mathbb{S}^2$ sobre o elipsoide $\mathcal{E}$.

Exemplo 1.3.8. Na esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, fixemos seu polo norte $N = (0, 0, 1)$. No subespaço $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, definiremos uma aplicação $\pi_N : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$ da seguinte forma. Para cada ponto $x \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ dado, $\pi_N(x)$ é o ponto em que a semirreta de $\mathbb{R}^3$, com origem em N e passando por x, intercepta o plano $x_3 = 0$. Os pontos dessa semirreta são da forma

$$N + t(x - N),\ t \geq 0.$$

Este ponto está no plano $x_3 = 0$ se, e somente se, $1 + t(x_3 - 1) = 0$, onde $x = (x_1, x_2, x_3)$. Assim, $t = \frac{1}{1-x_3}$ e, portanto,

$$\pi_N(x) = \frac{1}{1 - x_3}(x_1, x_2, 0). \tag{1.9}$$

A expressão em (1.9) mostra que π_N é contínua, e é chamada a *projeção estereográfica* da esfera $\mathbb{S}^2$. Considere agora a aplicação $\varphi_N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ definida por

$$\varphi_N(x) = \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \frac{2x_2}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1}\right),$$

para todo $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Tem-se que φ_N é contínua, e um cálculo simples mostra que

$$\varphi_N \circ \pi_N = id \quad \text{e} \quad \pi_N \circ \varphi_n = id,$$

ou seja, a projeção estereográfica π_N é um homeomorfismo entre $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ e o plano $\mathbb{R}^2$.

Exercícios

1. Considere uma aplicação contínua $f\colon X \to \mathbb{R}^n$, definida num subespaço $X \subset \mathbb{R}^m$. Prove que o gráfico $Gr(f)$ de f e o domínio X são subespaços homeomorfos.

2. Prove que o cone

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2,\ z \geq 0\}$$

é homeomorfo ao plano $\mathbb{R}^2$.

3. Estabeleça um homeomorfismo entre $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ e o cilindro $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

1.4 Aplicações diferenciáveis

Nesta seção iremos somente apresentar as propriedades básicas das aplicações diferenciáveis entre espaços Euclidianos. Para funções reais de uma variável real, dizemos que uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *derivável* num ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ se existe um número real $f'(x_0)$ tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x} = f'(x_0). \tag{1.10}$$

A relação (1.10) não se aplica para aplicações mais gerais $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, mas podemos reformulá-la a fim de estendermos a tais aplicações.

Para isso, defina uma aplicação linear $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pondo

$$T(v) = f'(x_0) \cdot v,$$

para todo $v \in \mathbb{R}$. Dessa forma, a relação (1.10) pode ser reescrita como

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + x) - f(x_0) - T(x)}{x} = 0.$$

Fixemos agora um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$.

Definição 1.4.1. Uma aplicação $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ é dita ser *diferenciável* num ponto $p \in U$ se existe uma aplicação linear $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(p + v) - f(p) - T(v)}{\|v\|} = 0.$$

Ou seja, f é diferenciável em $p \in U$ se existe uma aplicação linear $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(p + v) - f(p) = T(v) + r(v),$$

onde

$$\lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0. \tag{1.11}$$

Como a condição (1.11) independe das normas escolhidas em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, o fato de uma aplicação ser ou não diferenciável num ponto também não depende das normas.

A *derivada direcional* de uma aplicação $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ num ponto $p \in U$, na direção de um vetor $v \in \mathbb{R}^m$, é definida pondo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t},$$

desde que o limite exista. A derivada direcional pode ser interpretada da seguinte forma. Considere $\epsilon > 0$ tal que o segmento de reta, parametrizado por $\lambda(t) = p + tv$, esteja contido em U, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. O segmento λ é transformado por f na curva $\alpha = f \circ \lambda$ em $\mathbb{R}^n$, cujo vetor velocidade no instante $t = 0$ coincide com a derivada direcional de f em p, na direção de v, pois

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= (f \circ \lambda)'(0) = \frac{d}{dt} f(\lambda(t))(0) = \frac{d}{dt} f(p + tv)(0) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} = \frac{\partial f}{\partial v}(p). \end{aligned}$$

Se $f_1, \ldots, f_n \colon U \to \mathbb{R}$ denotam as funções coordenadas de f, então

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(p), \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial v}(p) \right).$$

No caso particular em que $v = e_i$ é o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^m$ escreveremos, como de costume, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ ao invés de $\frac{\partial f}{\partial e_i}(p)$. Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(p), \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(p) \right).$$

Observação 1.4.2. Se $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $p \in U$ e para instantes t suficientemente pequenos, tem-se

$$f(p + tv) - f(p) = T(tv) + r(tv),$$

com

$$\lim_{t \to 0} \frac{r(tv)}{\|tv\|} = 0.$$

Como T é linear, tem-se $T(tv) = tT(v)$, logo

$$\frac{f(p + tv) - f(p)}{t} = T(v) + \frac{r(tv)}{t}.$$

Isso implica que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} = T(v).$$

Disso decorre, em particular, que a aplicação linear T que melhor aproxima f numa vizinhança do ponto p é única. Ela será chamada a *diferencial* de f em p, e denotada por $df(p)$.

Vejamos alguns exemplos iniciais.

Exemplo 1.4.3. Toda aplicação constante $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, com $f(x) = y_0$, é diferenciável, e $df(p) = 0$, para todo $p \in U$. De fato, isso segue de que $f(p+v) - f(p) = y_0 - y_0 = 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^m$

Exemplo 1.4.4. A aplicação identidade $id\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável e, em todo ponto $p \in U$, a diferencial de id em p é a aplicação linear identidade de $\mathbb{R}^n$. De fato, basta observar que

$$id(p+v) - id(p) = p + v - p = v = id(v) + 0,$$

para quaisquer $p \in U$ e $v \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.4.5. Toda aplicação linear $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável e, para cada $p \in \mathbb{R}^m$, tem-se $dT(p) = T$. De fato,

$$T(p+v) - T(p) = T(v) = T(v) + 0,$$

para todo $v \in \mathbb{R}^m$.

Exemplo 1.4.6. Toda aplicação bilinear $\phi\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é diferenciável e, para cada ponto $(p,q) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, sua diferencial em (p,q) é a aplicação bilinear $d\phi(p,q)\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ dada por

$$d\phi(p,q) \cdot (v,w) = \phi(p,w) + \phi(v,q), \tag{1.12}$$

para todo $(v,w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. De fato, como ϕ é bilinear, tem-se

$$\phi(p+v, q+w) - \phi(p,q) = \phi(p,w) + \phi(v,q) + \phi(v,w).$$

Considere uma constante $c > 0$ tal que

$$\|\phi(v,w)\| \leq c \cdot \|v\| \cdot \|w\|,$$

para quaisquer $v \in \mathbb{R}^m$ e $w \in \mathbb{R}^n$ (cf. Exemplo 1.2.5). Usando a norma da soma, temos que $\|(v,w)\| = \|v\| + \|w\|$. Assim,

$$\frac{\|\phi(v,w)\|}{\|(v,w)\|} \leq \frac{c \cdot \|v\| \cdot \|w\|}{\|v\| + \|w\|} \leq c \cdot \|v\|.$$

Isso implica que

$$\lim_{(v,w)\to(0,0)} \frac{\phi(v,w)}{\|(v,w)\|} = 0.$$

Portanto, a condição de diferenciabilidade é satisfeita, sendo a diferencial dada em (1.12) e o resto sendo $r(v,w) = \phi(v,w)$.

Exemplos importantes de aplicações bilineares são o produto interno $\phi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dado por

$$\phi(v, w) = \langle v, w \rangle,$$

cuja diferencial é dada por

$$d\phi(v, w) \cdot (v, w) = \langle x, w \rangle + \langle y, v \rangle,$$

e a multiplicação de matrizes $\varphi\colon \mathbb{R}^{mp} \times \mathbb{R}^{pn} \to \mathbb{R}^{mn}$ dada por

$$\varphi(X, Y) = X \cdot Y,$$

cuja diferencial é dada por

$$d\varphi(X, Y) \cdot (V, W) = X \cdot W + Y \cdot V.$$

Veremos a seguir algumas propriedades das aplicações diferenciáveis.

Proposição 1.4.7. Uma aplicação $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável num ponto $p \in U$ se, e somente se, cada função coordenada $f_i\colon U \to \mathbb{R}$ é diferenciável em p, com $1 \leq i \leq n$.

Demonstração. Basta observar que a igualdade vetorial

$$f(p + v) - f(p) = df(p) \cdot v + r(v)$$

equivale às n igualdades numéricas

$$f_i(p + v) - f_i(p) = df_i(p) \cdot v + r_i(v),$$

com $r_i(v) = (r_1(v), \ldots, r_n(v))$. Além disso, o limite vetorial

$$\lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$$

corresponde aos n limites numéricos

$$\lim_{v \to 0} \frac{r_i(v)}{\|v\|} = 0,$$

e isso conclui a demonstração. $\square$

Em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, a diferencial $df(p)$ possui uma matriz, chamada a *matriz jacobiana* de f em p, denotada por $Jf(p)$. Suas m colunas são os vetores

$$df(p) \cdot e_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(p), \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(p) \right)$$

Assim,

$$Jf(p) = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{array} \right),$$

onde $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Vejamos um exemplo simples.

Exemplo 1.4.8. Considere a aplicação $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, xy),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Segundo a Proposição 1.4.7, f é diferenciável e sua diferencial num ponto $p = (x, y)$ é dada por

$$df(p) = \left(\begin{array}{cc} 2x & -2y \\ y & x \end{array} \right).$$

Assim, por exemplo, no ponto $p = (1, 1)$ e para o vetor $v = (1, 2)$, temos

$$df(p) \cdot v = df(p) \cdot (1, 2) = (-2, 3).$$

Exemplo 1.4.9. Dados um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, um ponto $p \in U$ e um vetor $v \in \mathbb{R}^n$, sempre é possível encontrar uma curva $\alpha \colon (-\epsilon, \epsilon) \to U$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Basta definir $\alpha(t) = p + tv$, com $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Escrevendo $p = (p_1, \ldots, p_n)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$, as funções coordenadas de α são

$$\alpha_i(t) = p_i + tv_i, \; 1 \leq i \leq n.$$

Assim, α é diferenciável, $\alpha(0) = p$ e

$$\alpha'(0) = (\alpha_1'(0), \ldots, \alpha_n'(0)) = (v_1, \ldots, v_n) = v,$$

como queríamos.

Proposição 1.4.10. Sejam $f \colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $g \colon V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ duas aplicações diferenciáveis, onde os abertos U e V são tais que $f(U) \subset V$. Então, a composta $g \circ f \colon U \to \mathbb{R}^k$ é diferenciável e, em todo ponto $p \in U$, tem-se

$$d(g \circ f)(p) = dg(f(p)) \circ df(p).$$

Demonstração. O fato que a aplicação composta é diferenciável é consequência da regra da cadeia para funções diferenciáveis. Dados um ponto $p \in U$ e um vetor $v \in \mathbb{R}^m$, considere uma curva diferenciável $\alpha\colon (-\epsilon, \epsilon) \to U$, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Seja $w = df(p) \cdot v$ e note que

$$dg(f(p)) \cdot w = \frac{d}{dt}(g \circ f \circ \alpha)(0).$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(g \circ f)(p) \cdot v &= \frac{d}{dt}(g \circ f \circ \alpha)(0) = dg(f(p)) \cdot w \\ &= dg(f(p)) \circ df(p) \cdot v, \end{aligned}$$

como queríamos. □

Considere dois abertos $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$. Um *difeomorfismo* entre U e V é uma bijeção diferenciável $f\colon U \to V$, cuja inversa $f^{-1}\colon V \to U$ também é diferenciável. Acerca de aplicações diferenciáveis que admitem inversas, decorre da regra da cadeia o seguinte

Corolário 1.4.11. Considere uma aplicação $f\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, diferenciável num ponto $p \in U$, que admite uma inversa $g\colon V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, diferenciável no ponto $q = f(p)$. Então, a diferencial $df(p)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo, cujo inverso é $dg(q)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Em particular, $m = n$.

Demonstração. Das igualdades $g \circ f = id|_U$ e $f \circ g = id|_V$, decorre da regra da cadeia que $dg(q) \circ df(p) = id$ em $\mathbb{R}^m$ e $df(p) \circ dg(q) = id$ em $\mathbb{R}^n$. Disso decorre que $dg(q) = df(p)^{-1}$. □

Como consequência do Corolário 1.4.11, se $f\colon U \to V$ é um difeomorfismo entre os abertos $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ então, para todo $p \in U$, a diferencial $df(p)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo. Em particular, $m = n$ e U, V são abertos do mesmo espaço Euclidiano.

Um exemplo de homeomorfismo diferenciável, cujo inverso não é diferenciável, é a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$. De forma mais precisa, f^{-1} não é diferenciável em $x = 0$. Isso mostra que o conceito de difeomorfismo não é o mesmo que homeomorfismo diferenciável.

Exercícios

1. Dado uma aplicação $f\colon \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}^n$, considere a extensão radial de f, que é a aplicação $F\colon \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right), & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Prove que F é diferenciável na origem $0 \in \mathbb{R}^{m+1}$ se, e somente se, f é linear[1].

2. Dados uma função diferenciável $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e um ponto $p \in U$, o *gradiente* de f em p é definido como o vetor $\mathrm{grad} f(p)$ que satisfaz

$$\langle \mathrm{grad} f(p), v\rangle = \frac{\partial f}{\partial v}(p),$$

para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Prove que o gradiente aponta para uma direção para o qual f é crescente.

3. Considere uma função diferenciável $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, onde U é um aberto e conexo de $\mathbb{R}^n$, tal que a diferencial $df(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é o funcional linear nulo em todo ponto $p \in U$. Prove que f é constante em U.

[1] De fato, f é a restrição de uma aplicação linear.

1.5 O teorema da aplicação inversa

Vimos na Seção 1.4 que se $f\colon U \to V$ é um difeomorfismo, onde U e V são abertos de $\mathbb{R}^n$, a diferencial $df(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo linear para cada $p \in U$. Ou seja, a matriz jacobiana $Jf(p)$ tem posto máximo em todos os pontos $p \in U$. O objetivo desta seção é discutir a recíproca deste fato. Consideremos inicialmente o caso em que f é uma função real de uma variável real.

Exemplo 1.5.1. Uma função derivável $f\colon I \to J$, entre os intervalos abertos $I, J \subset \mathbb{R}$, é um difeomorfismo se, e somente se, $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in I$. De fato, se $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in I$, então ou $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, e neste caso f é um homeomorfismo crescente, ou $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, e f é um homeomorfismo decrescente. Em qualquer caso, o fato que $f^{-1}\colon J \to I$ é derivável decorre do teorema da função inversa.

Quando passamos para outras dimensões, a análise é um pouco mais cuidadosa, como veremos a seguir.

Exemplo 1.5.2. Considere a aplicação $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y),$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Observe que f é diferenciável, pois cada uma de suas funções coordenadas o é, e sua matriz jacobiana num ponto (x,y) é dada por

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}.$$

Disso decorre, em particular, que $\det(Jf(x,y)) = e^{2x} \neq 0$, qualquer que seja o ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ou seja, em todo ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, a diferencial $df(x,y)$ é um isomorfismo linear. No entanto, f não é injetora, pois

$$f(x,y) = f(x, y + 2\pi).$$

Geometricamente, f transforma cada reta vertical $x = x_0$ sobre o círculo centrado na origem de raio e^{x_0}, e transforma cada reta horizontal $y = y_0$ sobre a semirreta que parte da origem e passa pelo ponto $(\cos y_0, \sin y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Uma aplicação diferenciável $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dita ser um *difeomorfismo local* se, para cada ponto $p \in U$, existe um aberto V_p de $\mathbb{R}^n$, com $p \in V_p \subset U$, tal que a restrição $f|_{V_p}$ é um difeomorfismo sobre o aberto $f(V_p)$. Se $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo local, a diferencial $df(p)$ é um isomorfismo linear, para todo $p \in U$. O resultado seguinte, conhecido como o *teorema da aplicação inversa*, estabelece a recíproca deste fato.

Teorema 1.5.3. *Seja $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável e suponha que exista um ponto $p \in U$ tal que a diferencial $df(p)$ é um isomorfismo linear. Então, existe um aberto V de $\mathbb{R}^n$, com $p \in V \subset U$, tal que $f|_V\colon V \to f(V)$ é um difeomorfismo.*

Finalizaremos esta seção com o teorema da função implícita. Lembre da álgebra linear que um funcional linear $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ou é sobrejetor ou é identicamente nulo. Assim, se $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, o mesmo se aplica à diferencial $df(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ em qualquer ponto $p \in U$.

O resultado seguinte, conhecido como o *teorema da função implícita*, nos fornece um meio geométrico de interpretar, localmente, funções diferenciáveis para os quais a diferencial é não-nula.

Teorema 1.5.4. *Seja $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e suponha que exista um ponto $p \in U$ tal que a diferencial $df(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ seja sobrejetora. Seja $f(p) = c$ e suponha, sem perda de generalidade, que $\frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \neq 0$. Se $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \oplus \mathbb{R}$ é uma decomposição em soma direta, com $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, existem um aberto $Z = W \times I$, onde W é um aberto de $\mathbb{R}^{n-1}$ contendo x_0 e I é um intervalo aberto contendo y_0, e uma função diferenciável $g\colon W \to \mathbb{R}$ tais que*

$$f(x, g(x)) = c,$$

para todo $x \in W \subset \mathbb{R}^{n-1}$.

Ou seja, o Teorema 1.5.4 nos diz que a interseção $f^{-1}(c) \cap Z$ é o gráfico da função diferenciável $g\colon W \to \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que a função g é definida implicitamente pela equação $f(x, y) = c$, onde $f(p) = c$.

Referências Bibliográficas

[1] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, 1976.

[2] E. L. Lima, *Curso de Análise*, vol. 2, Projeto Euclides, 1999.

[3] J. R. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, 2000.