

## Recobrimentos Riemannianos

Recordemos inicialmente que uma aplicação diferenciável e sobrejetora  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ , entre variedades diferenciáveis, é chamada uma *aplicação de recobrimento* se cada ponto  $p \in M$  pertence a uma vizinhança  $V \subset M$  tal que

$$\pi^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

é uma união disjunta de abertos  $U_\alpha$ , tais que  $\pi|_{U_\alpha} : U_\alpha \rightarrow V$  é um difeomorfismo, para todo  $\alpha \in I$ . Decorre, em particular, que toda aplicação de recobrimento é um difeomorfismo local.

A variedade  $\tilde{M}$  chama-se um *recobrimento* para  $M$  e, para cada  $p \in M$ , o conjunto  $\pi^{-1}(p)$  chama-se a *fibra* sobre  $p$ . A variedade  $M$  é chamada a *base* do recobrimento, enquanto que  $V$  é usualmente chamada de *vizinhança distinguida* para o ponto  $p$ .

**Exemplo 1.** A aplicação  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por  $\pi(t) = e^{2\pi it}$  é uma aplicação de recobrimento. De fato,  $\pi$  é claramente diferenciável e é sobrejetora pois, para cada  $p \in \mathbb{S}^1$ , existe  $t_0 = \theta/2\pi \in \mathbb{R}$  tal que  $\pi(t_0) = e^{i\theta} = p$ . Considere agora a vizinhança  $V = \mathbb{S}^1 \setminus \{-p\}$  de  $p$  em  $\mathbb{S}^1$ . Observe que

$$\pi^{-1}(V) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left( t_0 + n - \frac{1}{2}, t_0 + n + \frac{1}{2} \right),$$

sendo uma união de intervalos abertos, dois a dois disjuntos, e cada um dos quais transformado difeomorficamente sobre  $V$  através de  $\pi$ .

**Definição 2.** Um *recobrimento Riemanniano*  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ , entre duas variedades Riemannianas, é uma aplicação de recobrimento que também é uma isometria local.

Uma maneira de obter uma métrica em uma variedade diferenciável  $\tilde{M}$  é fazer o pull-back da métrica  $(M, \langle, \rangle)$  ao longo de um difeomorfismo local  $\phi : \tilde{M} \rightarrow M$ .

**Proposição 3.** Seja  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  uma aplicação de recobrimento. Se  $M$  é uma variedade Riemanniana, existe uma única métrica Riemanniana em  $\tilde{M}$  que torna  $\pi$  um recobrimento Riemanniano.

*Demonstração.* Definimos uma métrica  $\langle, \rangle$  em  $\tilde{M}$  pondo  $\langle, \rangle = \pi^* \langle, \rangle_M$ . Ou seja, dados  $\tilde{p} \in \tilde{M}$  e  $v, w \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ , definimos

$$\langle v, w \rangle_{\tilde{p}} = \langle d\pi(\tilde{p}) \cdot v, d\pi(\tilde{p}) \cdot w \rangle_{\pi(\tilde{p})}. \quad (3.1)$$

Como  $d\pi(\tilde{p})$  é um isomorfismo linear e, portanto, injetora, segue que (3.1) é um produto interno positivo definido, que depende diferenciavelmente em  $\tilde{p}$  pois  $\pi$  é um difeomorfismo local. Finalmente, a definição da métrica  $\langle, \rangle$  em  $\tilde{M}$  torna  $\pi$  uma isometria local. Como a fórmula (3.1) vale para todo par de vetores tangentes, isso define a métrica de forma única em cada ponto.  $\square$

**Proposição 4.** Dado uma variedade Riemanniana  $\tilde{M}$ , considere um subgrupo  $G \subset \text{Iso}(\tilde{M})$  agindo de forma livre e propriamente descontínua. Então, existe uma única métrica Riemanniana em  $M = \tilde{M}/G$ , chamada a *métrica quociente*, que torna a projeção  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  um recobrimento Riemanniano.

*Demonstração.* O fato da ação de  $G$  em  $M$  ser livre e propriamente descontínua garante que o espaço quociente  $M = \tilde{M}/G$  admite uma única estrutura de variedade diferenciável que torna a projeção  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  uma aplicação de recobrimento. Dado um ponto  $p \in M$ , considere uma vizinhança distinguida  $V$  de  $p$  em  $M$ , com  $\pi^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$ . No aberto  $V$ , definimos

$$\langle, \rangle = ((\pi|_{U_i})^{-1})^* \langle, \rangle_{\tilde{M}},$$

para qualquer  $i \in I$ . De forma mais precisa, dados  $q \in V$ ,  $v, w \in T_q M$  e  $i \in I$ , seja  $\tilde{q}_i = (\pi|_{U_i})^{-1}(q)$  o único ponto da fibra  $\pi^{-1}(q)$  que está no aberto  $U_i$ . Definimos

$$\langle v, w \rangle_q = \langle d\pi(\tilde{q}_i)^{-1} \cdot v, d\pi(\tilde{q}_i)^{-1} \cdot w \rangle_{\tilde{q}_i}.$$

Afirmamos que esta definição não depende da escolha do ponto em  $\pi^{-1}(q)$ . De fato, se  $\tilde{q}_j$  é outro ponto na fibra  $\pi^{-1}(q)$ , existe uma isometria  $\phi \in G$  tal que  $\phi(\tilde{q}_i) = \tilde{q}_j$ . Como  $\pi \circ \phi = \pi$ , segue da regra da cadeia que

$$d\pi(\tilde{q}_j) \circ d\phi(\tilde{q}_i) = d\pi(\tilde{q}_i),$$

logo

$$\begin{aligned} \langle d\pi(\tilde{q}_i)^{-1}v, d\pi(\tilde{q}_i)^{-1}w \rangle &= \langle d\phi(\tilde{q}_i)^{-1}(d\pi(\tilde{q}_j)^{-1}v), d\phi(\tilde{q}_i)^{-1}(d\pi(\tilde{q}_j)^{-1}w) \rangle \\ &= \langle d\pi(\tilde{q}_j)^{-1}v, d\pi(\tilde{q}_j)^{-1}w \rangle, \end{aligned}$$

pois  $d\phi(\tilde{q}_i) : T_{\tilde{q}_i} \tilde{M} \rightarrow T_{\tilde{q}_j} \tilde{M}$  é uma isometria linear. Finalmente, a diferenciabilidade da métrica  $\langle, \rangle$  segue do fato de que, localmente, ela é dada por uma métrica pull-back.  $\square$

**Exemplo 5** (Espaço projetivo real  $\mathbb{R}P^n$ ). Como conjunto,  $\mathbb{R}P^n$  é constituído de todas as retas em  $\mathbb{R}^{n+1}$  que passam pela origem. Observe, inicialmente, que toda reta intercepta a esfera  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  em dois pontos antipodais, de modo que podemos ver  $\mathbb{R}P^n$  como um espaço quociente de  $\mathbb{S}^n$ ,

declarando que  $x, y \in \mathbb{S}^n$  são equivalente se, e somente se,  $x = \pm y$ . Considere agora o grupo  $G$  consistindo de duas isometrias de  $\mathbb{S}^n$ , a aplicação identidade e a aplicação antípoda. Então,  $G$  age na esfera de forma livre e própria ( $G$  é um grupo finito), logo  $\mathbb{R}P^n$  admite uma estrutura de variedade diferenciável. Além disso, como a ação de  $G$  é por isometrias, segue da Proposição 4 que  $\mathbb{R}P^n$  admite uma métrica Riemanniana tornando a projeção  $\pi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  um recobrimento Riemanniano.

**Proposição 6.** Seja  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  um recobrimento Riemanniano. As geodésicas de  $M$  são as projeções das geodésicas de  $\tilde{M}$ , e as geodésicas de  $\tilde{M}$  são os levantamentos das geodésicas de  $M$ .

*Demonstração.* Sejam  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$  curvas diferenciáveis em  $M$  e  $\tilde{M}$ , respectivamente, com  $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ . Como  $\pi$  é isometria local,  $\pi$  transforma arcos suficientemente pequenos de  $\tilde{\gamma}$  isometricamente sobre pequenos arcos de  $\gamma$ . Disso decorre que  $\tilde{\gamma}$  é geodésica se, e somente se,  $\gamma$  é geodésica. Finalmente, observe que toda curva diferenciável em  $M$  é a projeção de qualquer uma de seu levantamento diferenciável, e toda curva diferenciável em  $\tilde{M}$  é o levantamento diferenciável de sua projeção a  $M$ .  $\square$

**Exemplo 7.** Considere o recobrimento Riemanniano  $\pi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ . Como as geodésicas de  $\mathbb{S}^n$  são os grandes círculos, parametrizados com velocidade constante, as geodésicas de  $\mathbb{R}P^n$  são as projeções destas. Em particular, como a projeção  $\pi$  identifica pontos antipodais de  $\mathbb{S}^n$ , as geodésicas de  $\mathbb{R}P^n$ , parametrizadas pelo comprimento de arco, são periódicas de período igual a  $\pi$ .

**Proposição 8.** Seja  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  um recobrimento Riemanniano no qual a base  $M$  é completa. Então,  $\tilde{M}$  também é completa.

*Demonstração.* Seja  $\tilde{\gamma}$  uma geodésica em  $\tilde{M}$ . Então, pela Proposição 6, a curva  $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$  é uma geodésica em  $M$ , que está definida em todo  $\mathbb{R}$  em virtude da completude de  $M$ . Novamente, pela Proposição 6,  $\tilde{\gamma}$  é o levantamento de  $\gamma$ , logo  $\tilde{\gamma}$  pode ser estendida a fim de estar definida em todo  $\mathbb{R}$ , mostrando que  $\tilde{M}$  é geodesicamente completa.  $\square$

Queremos agora obter um resultado na direção oposta da Proposição 8. Para isso, faremos uso do seguinte lema auxiliar.

**Lema 9.** Dados uma isometria local  $f : M \rightarrow N$  e um ponto  $p \in M$ , tem-se

$$f(\exp_p(v)) = \exp_{f(p)}(df(p) \cdot v),$$

para todo  $v \in T_p M$ , desde que  $\exp_p(v)$  esteja definido.

*Demonstração.* Dado um ponto  $p \in M$ , seja  $v \in T_p M$  para o qual  $\exp_p(v)$  esteja definido. Assim,

$$t \mapsto \exp_p(tv)$$

é uma geodésica e, como  $f$  é isometria local, tem-se que  $t \mapsto f(\exp_p(tv))$  também é uma geodésica. Como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\exp_p(tv))|_{t=0} &= df(p) \cdot \left( \frac{d}{dt} \exp_p(tv)|_{t=0} \right) \\ &= df(p) \cdot v, \end{aligned}$$

segue que

$$f(\exp_p(tv)) = \exp_{f(p)}(tdf(p) \cdot v).$$

Fazendo  $t = 1$  na igualdade acima, obtemos o resultado.  $\square$

**Teorema 10.** *Seja  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  uma isometria local. Se  $\tilde{M}$  é completa, então  $\pi$  é um recobrimento Riemanniano e  $M$  também é completa.*

*Demonstração.* Dado um ponto  $p \in M$ , considere um número  $\epsilon > 0$  tal que a aplicação exponencial  $\exp_p : B_\epsilon(0_p) \rightarrow B_\epsilon(p)$  seja um difeomorfismo. Afirmamos que  $B_\epsilon(p)$  é uma vizinhança distinguida de  $p$ , com

$$\pi^{-1}(B_\epsilon(p)) = \bigcup_{\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)} B_\epsilon(\tilde{p}).$$

A completude de  $\tilde{M}$  garante que  $\exp_{\tilde{p}} : B_\epsilon(0_{\tilde{p}}) \rightarrow B_\epsilon(\tilde{p})$  está bem definida. Além disso, como  $\pi$  é isometria local, segue do Lema 9 que

$$\pi(\exp_{\tilde{p}}(v)) = \exp_p(d\pi(\tilde{p}) \cdot v),$$

para todo  $v \in B_\epsilon(0_{\tilde{p}}) \subset T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ , ou seja, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} B_\epsilon(0_{\tilde{p}}) & \xrightarrow{\exp_{\tilde{p}}} & B_\epsilon(\tilde{p}) \\ d\pi(\tilde{p}) \downarrow & & \downarrow \pi \\ B_\epsilon(0_p) & \xrightarrow{\exp_p} & B_\epsilon(p) \end{array} \quad (10.1)$$

é comutativo. Como  $\exp_p$  e  $d\pi(\tilde{p})$  são difeomorfismos, segue que a aplicação  $\pi \circ \exp_{\tilde{p}} : B_\epsilon(0_{\tilde{p}}) \rightarrow B_\epsilon(p)$  também é um difeomorfismo. Por outro lado, decorre da Proposição ?? que todo ponto de  $B_\epsilon(\tilde{p})$  pode ser ligado a  $\tilde{p}$  por uma geodésica minimizante, implicando que  $\exp_{\tilde{p}}(B_\epsilon(0_{\tilde{p}})) = B_\epsilon(\tilde{p})$ , ou

seja,  $\exp_{\tilde{p}}: B_\epsilon(0_{\tilde{p}}) \rightarrow B_\epsilon(\tilde{p})$  é sobrejetora. A comutatividade do diagrama (10.1) implica que  $\exp_{\tilde{p}}: B_\epsilon(0_{\tilde{p}}) \rightarrow B_\epsilon(\tilde{p})$  é também injetora. Isso implica que  $\pi: B_\epsilon(\tilde{p}) \rightarrow B_\epsilon(p)$  é bijetora e, sendo um difeomorfismo local, é um difeomorfismo. Isso também implica que

$$\bigcup_{\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)} B_\epsilon(\tilde{p}) \subset \pi^{-1}(B_\epsilon(p)).$$

Reciprocamente, dado  $\tilde{q} \in \pi^{-1}(B_\epsilon(p))$ , seja  $q = \pi(\tilde{q}) \in B_\epsilon(p)$ . Pela escolha de  $\epsilon$ , existe um único  $v \in T_q M$ , com  $\|v\| < \epsilon$ , tal que  $\exp_q(v) = p$ . Seja

$$\tilde{v} = d\pi(\tilde{q})^{-1} \cdot v \in T_{\tilde{q}} \tilde{M}.$$

A geodésica  $\tilde{\gamma}(t) = \exp_{\tilde{q}}(t\tilde{v})$  está definida em todo  $\mathbb{R}$ , devido a completude de  $\tilde{M}$ . Temos

$$\begin{aligned} (\pi \circ \tilde{\gamma})(1) &= \pi(\exp_{\tilde{q}}(\tilde{v})) = \exp_{\pi(\tilde{q})}(d\pi(\tilde{q}) \cdot \tilde{v}) \\ &= \exp_q(v) = p, \end{aligned}$$

de modo que  $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{p}_0$ , para algum  $\tilde{p}_0 \in \pi^{-1}(p)$ . Como  $\|v\| < \epsilon$ , temos que

$$\tilde{q} = \tilde{\gamma}(0) \in B(\tilde{p}_0, \epsilon),$$

e isso mostra que

$$\pi^{-1}(B_\epsilon(p)) \subset \bigcup_{\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)} B_\epsilon(\tilde{p}).$$

Tomando  $\delta = \epsilon/2$  temos, da mesma forma, que

$$\pi^{-1}(B_\epsilon(p)) = \bigcup_{\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)} B_\epsilon(\tilde{p}).$$

Afirmamos que as bolas abertas  $B_\delta(\tilde{p})$ , com  $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ , são duas a duas disjuntas. De fato, se existisse um ponto  $\tilde{q} \in B(\tilde{p}_i, \delta) \cap B(\tilde{p}_j, \delta)$ , para alguns  $\tilde{p}_i, \tilde{p}_j \in \pi^{-1}(p)$ , então

$$d(\tilde{p}_i, \tilde{p}_j) \leq d(\tilde{p}_i, \tilde{q}) + d(\tilde{q}, \tilde{p}_j) < \delta + \delta = \epsilon,$$

de modo que  $\tilde{p}_j \in B(\tilde{p}_i, \epsilon)$ . Porém,  $\pi$  é injetora na bola  $B(\tilde{p}_i, \epsilon)$ , logo devemos ter  $\tilde{p}_i = \tilde{p}_j$  e, assim,  $i = j$ . Provamos, assim, que  $\pi$  é um recobrimento Riemanniano. Finalmente, a completude de  $M$  segue da completude de  $\tilde{M}$  junto com a Proposição 6.  $\square$