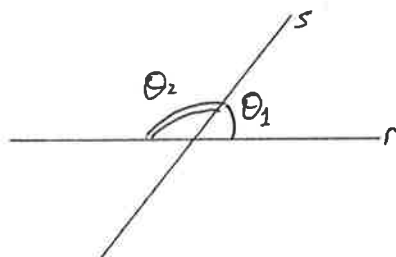


Medida angular

1. Medida angular entre retas

Sejam r e s duas retas concorrentes



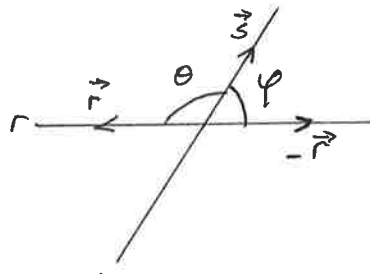
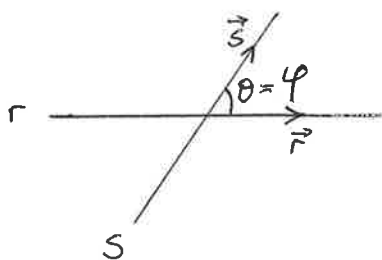
Para evitar ambiguidade, definimos o ângulo entre r e s como sendo o menor dos ângulos θ_1 e θ_2 . Este é um número do intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Denotamos por $\text{ang}(r, s)$ o ângulo entre as retas r e s . Temos

$$0 \leq \text{ang}(r, s) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Seja $\vec{r}$ um vetor diretor da reta r e $\vec{s}$ um vetor diretor da reta s .

Seja $\theta = \text{ang}(\vec{r}, \vec{s})$ e $\varphi = \text{ang}(r, s)$



$$\text{Temos } \text{ang}(r, s) = \begin{cases} \text{ang}(\vec{r}, \vec{s}) & \text{se } \text{ang}(\vec{r}, \vec{s}) \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \text{ang}(-\vec{r}, \vec{s}) & \text{se } \text{ang}(\vec{r}, \vec{s}) \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

$$\text{Temos } \cos(\text{ang}(\vec{r}, \vec{s})) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{s}}{\|\vec{r}\| \|\vec{s}\|} \quad \text{e} \quad \cos(\text{ang}(-\vec{r}, \vec{s})) = -\frac{\vec{r} \cdot \vec{s}}{\|\vec{r}\| \|\vec{s}\|} = -\cos(\text{ang}(\vec{r}, \vec{s}))$$

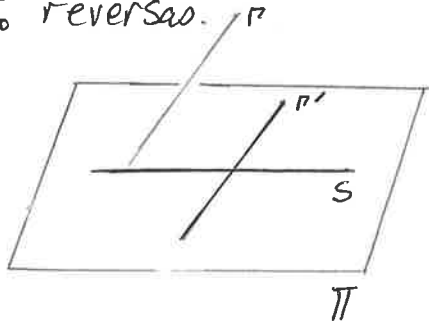
$$\text{Portanto } \cos \varphi = \begin{cases} \cos \theta & \text{se } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\cos \theta & \text{se } \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

ou seja $\cos \varphi = |\cos \theta|$, isto é

$$\boxed{\cos(\text{ang}(r, s)) = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \|\vec{s}\|}}$$

Se as retas r e s são paralelas, então $\text{ang}(r, s) = 0$.

Suponha que r e s são reversas.



Seja Π o plano que
contem a reta s

e é paralelo a reta r

Seja r' uma reta paralela a r e contida no plano Π .

Definimos $\text{ang}(r, s) = \text{ang}(r', s)$.

Como um vetor diretor $\vec{r}$ de r também é vetor diretor da reta r' , temos

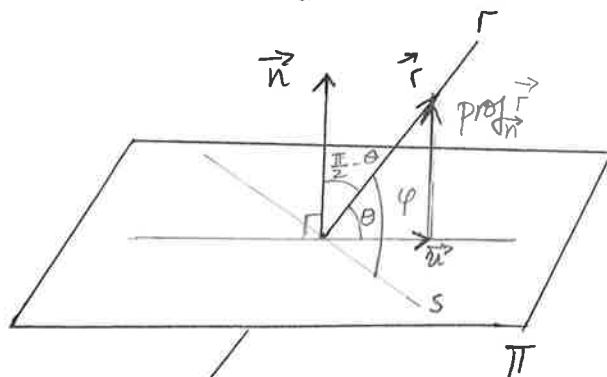
$$\cos(\text{ang}(r, s)) = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \|\vec{s}\|}.$$

[A construção acima é para tornar intuitivo a construção do ângulo entre duas retas reversas.]

Exemplo. Seja $\Sigma = (0, B)$ um sistema ortogonal de coordenadas

Obtenha equação da reta r que contém o ponto $P = (1, 1, 1)$ e é concorrente com $s: x = 2y = 2z$, Sabendo que o cos-seno da medida angular entre r e s é igual a $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. Medida angular entre reta e plano



Seja r uma reta transversal a um plano Π . Seja $\vec{r}$ um vetor diretor de r e $\vec{n}$ um vetor normal de Π .

Definimos o ângulo entre r e Π como

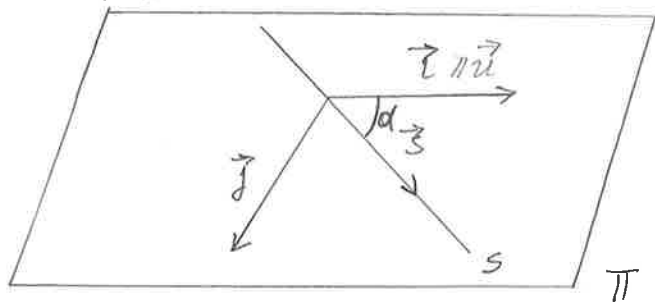
$\text{ang}(r, \Pi) := \text{menor dos ângulos } \text{ang}(r, s) \text{ com } s \text{ uma reta em } \Pi$.

Seja $\vec{u}$ a projeção ortogonal de $\vec{r}$ ao plano Π .

Temos $\text{proj}_{\vec{n}} \vec{r} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$ e $\vec{r} = \text{proj}_{\vec{n}} \vec{r} + \vec{u}$.

Portanto $\vec{u} = \vec{r} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$

Seja $\vec{i} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ e $\vec{j} = \vec{i} \wedge \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$. Os vetores $\vec{i}, \vec{j}$ são vetores diretores do plano Π , são unitários e ortogonais.



Seja s uma reta em Π e $\vec{s}$ um vetor diretor de s . Escolhamos $\vec{s}$ unitário

Temos $\vec{s} = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \sin \alpha \cdot \vec{j}$ onde $\alpha = \text{ang}(\vec{s}, \vec{i})$

e $\vec{r} \cdot \vec{s} = \cos \alpha \vec{r} \cdot \vec{i} + \sin \alpha \vec{r} \cdot \vec{j}$

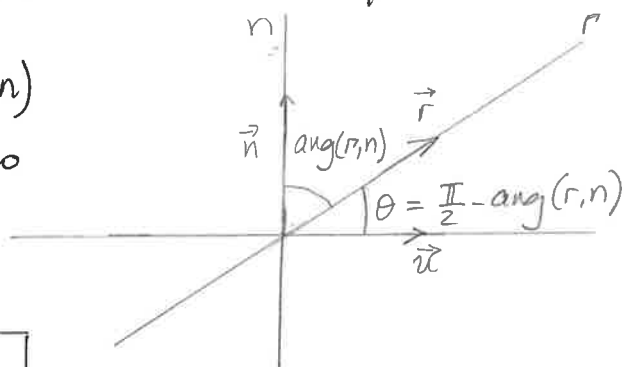
Como $\vec{j}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{n}$, e $\vec{r}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{n}$, segue que $\vec{j}$ é ortogonal a $\vec{r}$. Portanto $\vec{r} \cdot \vec{j} = 0$,

e $\vec{r} \cdot \vec{s} = \cos \alpha \vec{r} \cdot \vec{i}$

Temos $\cos(\text{ang}(r, s)) = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \|\vec{s}\|} = \frac{|\cos \alpha| \|\vec{r}\| \|\vec{s}\|}{\|\vec{r}\| \|\vec{s}\|} = |\cos \alpha|$ ($\vec{r}, \vec{s}$ são unitários).

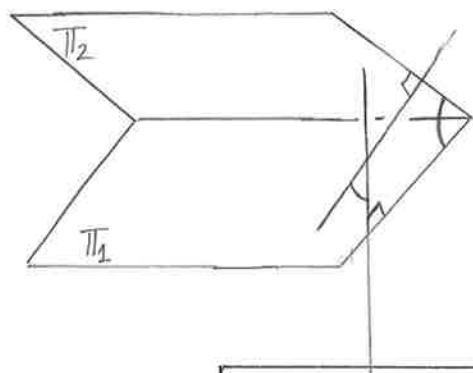
Portanto o $\text{ang}(r, s)$ é mínimo se, e somente se, $\alpha = 0$ se, e somente se, s é a projeção ortogonal da reta r sobre o plano Π .

Então $\text{ang}(r, \Pi) = \frac{\Pi}{2} - \text{ang}(r, n)$
onde n é uma reta ortogonal ao plano Π .



Daí $\boxed{\sin(\text{ang}(r, \Pi)) = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{r}\| \|\vec{n}\|}}$

3. Medida angular entre dois planos



A medida angular entre dois planos Π_1 e Π_2 é a medida angular entre duas retas quaisquer r_1 e r_2 perpendiculares a Π_1 e Π_2 respectivamente.

Temos $\boxed{\cos(\text{ang}(\Pi_1, \Pi_2)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|}}$

Com $\vec{n}_1$ vetor normal a Π_1 e
 $\vec{n}_2$ vetor normal a Π_2 .

Exemplo Seja $\Sigma = (0, E)$ um sistema ortogonal de coordenadas.

Sejam $\Pi_1: x - y + z = 20$

$\Pi_2: X = (1, 1, -2) + \lambda(0, -1, 1) + \mu(1, -3, 2), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Calcule $\text{ang}(\Pi_1, \Pi_2)$.