

Resolução. Observe que a esfera passa pela origem e tem centro em $(0, 0, 1/2)$. A esfera intercepta o cone na origem $(0, 0, 0)$ e na circunferência no plano $z = 1/2$ de centro $(0, 0, 1/2)$ e raio $1/2$. De fato, para (x, y, z) pertence ao cone e a esfera, temos

$$z = \underbrace{x^2 + y^2}_{z^2} + z^2 = 2z^2,$$

ou seja $z = 0$ ou $z = 1/2$. Isso resulta, $x = y = z = 0$ ou $x^2 + y^2 = (1/2)^2$ e $z = 1/2$. Escrevemos a equação da esfera em coordenadas cilíndricas como

$$r^2 + z^2 = z.$$

A equação do cone em coordenadas cilíndricas como

$$z = r.$$

Portanto a descrição do sólido E em coordenadas cilíndricas é

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1/2, r \leq z \leq (1 + \sqrt{1 - 4r^2})/2\}$$

O volume de E é

$$\begin{aligned} V(E) &= \iiint_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \int_r^{(1+\sqrt{1-4r^2})/2} r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4r^2}}{2} - r \right) r dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{1/2} \left(\frac{r}{2} + \frac{r\sqrt{1 - 4r^2}}{2} - r^2 \right) dr \\ &= 2\pi \left(\frac{r^2}{4} - \frac{(1 - 4r^2)^{3/2}}{24} - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_{r=0}^{r=1/2} \\ &= \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas

No sistema de coordenadas esféricas, um ponto P no espaço (Figura 10) é representado pela tripla ordenada (ρ, θ, ϕ) onde

- ρ é a distância entre P e a origem O ;
- θ é o mesmo ângulo usado para descrever a localização em coordenadas cilíndricas;
- ϕ é o ângulo formado pelo eixo z positivo e segmento de reta OP e $0 \leq \phi \leq \pi$.

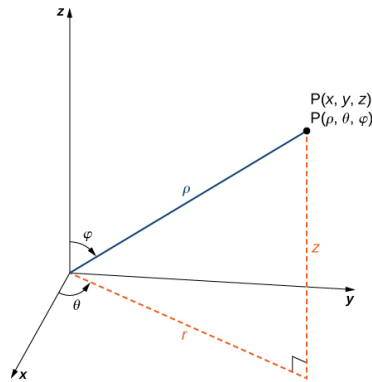


Figura 10:

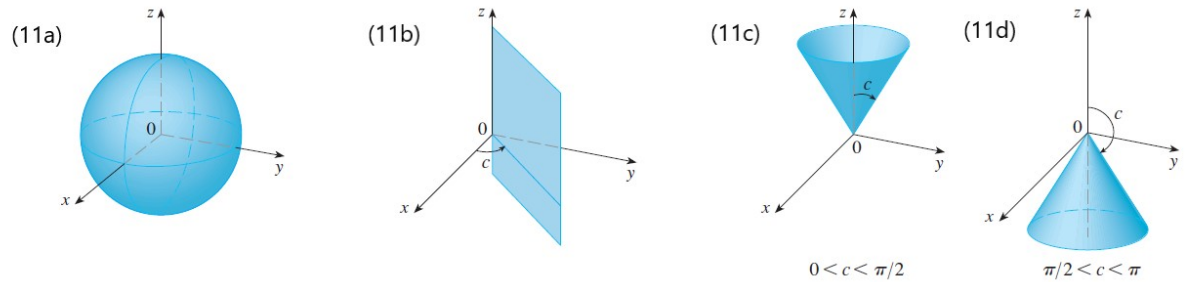


Figura 11: Superfícies esféricas

O sistema de coordenadas esféricas é especialmente útil em problemas nos quais exista simetria em torno de um ponto e a origem esteja colocada neste ponto. Por exemplo, a esfera com centro na origem e raio c tem a equação simples $\rho = c$ (veja a Figura 11a) – essa é a razão do nome “coordenadas esféricas”. O gráfico da equação $\theta = c$ é um semiplano vertical (veja a Figura 11b) e a equação $\phi = c$ representa um semicone com o eixo z como seu eixo (veja as Figuras 11c e 11d).

A relação entre coordenadas esféricas e retangulares pode ser vista na Figura 12. Dos triângulos OPQ e OPP' , temos

$$z = \rho \cos \phi, \quad r = \rho \sin \phi.$$

Mas $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, de modo que para converter de coordenadas esféricas para retangulares, usamos as equações

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi.$$

Para converter de coordenadas retangulares em esféricas, usamos as equações

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \tan \theta = y/x, \quad \cos \phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

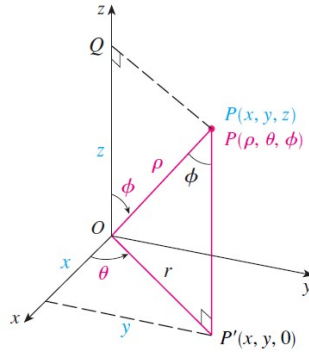


Figura 12:

Cálculo de Integrais Triplas com Coordenadas Esféricas

Vamos agora estabelecer uma integral tripla no sistema de coordenadas esféricas. Seja a função $f(x, y, z)$ contínua em uma **cunha esférica** limitada

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$

onde $a \geq 0$, $\beta - \alpha \leq 2\pi$ e $d - c \leq \pi$.

Para calcular a integral tripla $\iiint_E f(x, y, z) dV$, dividimos o sólido E em pequenas cunhas esféricas E_{ijk} por meio esferas igualmente espaçadas $\rho = \rho_i$, semiplanos $\theta = \theta_j$ e semicone $\phi = \phi_k$. A Figura 13 mostra que E_{ijk} é aproximadamente uma caixa retangular com dimensões $\Delta\rho$, $\rho_i \Delta\phi$ (arco de circunferência de raio ρ_i e ângulo $\Delta\phi$) e $\rho_i \sin \phi_k \Delta\theta$ (arco de circunferência de raio $\rho_i \sin \phi_k$ e ângulo $\Delta\theta$).

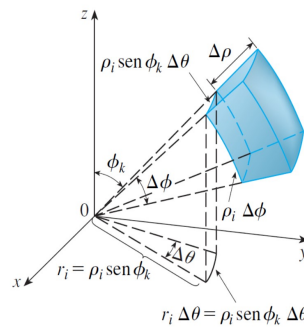


Figura 13:

Logo, uma aproximação do volume de E_{ijk} é dada por

$$\Delta V_{ijk} \approx \rho_i^2 \sin \phi_k \Delta \rho \Delta \theta \Delta \phi$$

Usando o Teorema do Valor Médio, podemos mostrar que o valor exato do volume de E_{ijk} é dado por

$$\Delta V_{ijk} = \tilde{\rho}_i^2 \sin \tilde{\phi}_k \Delta \rho \Delta \theta \Delta \phi$$

para algum ponto $(\tilde{\rho}_i, \tilde{\theta}_j, \tilde{\phi}_k)$ no interior de E_{ijk} . Seja $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ as coordenadas retangulares desse ponto, Então,

$$\begin{aligned} \iiint_E f(x, y, z) dV &= \lim_{i,j,k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V_{ijk} \\ &= \lim_{i,j,k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(\tilde{\rho}_i \sin \tilde{\phi}_k \cos \tilde{\theta}_j, \tilde{\rho}_i \sin \tilde{\phi}_k \sin \tilde{\theta}_j, \tilde{\rho}_i \cos \tilde{\phi}_k) \tilde{\rho}_i^2 \sin \tilde{\phi}_k \Delta \rho \Delta \theta \Delta \phi \end{aligned}$$

Mas esse é o limite da soma tripla de Riemann para a função

$$g(\rho, \theta, \phi) = f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi$$

Consequentemente,

$$\boxed{\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi}$$

Exemplo 4. Calcule $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV$, sendo B a bola unitária

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

Resolução. Como a fronteira de B é a esfera de centro na origem e raio 1, utilizaremos coordenadas esféricas:

$$B = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}$$

Além disso, coordenadas esféricas são convenientes, pois

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

Então,

$$\begin{aligned} \iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{(\rho^2)^{3/2}} \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi \\ &= \int_0^\pi \sin \phi d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 e^{(\rho^3)} d\rho \\ &= (-\cos \phi) \Big|_0^\pi (2\pi) \left(\frac{1}{3} e^{(\rho^3)} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{4\pi}{3} (e - 1) \end{aligned}$$

Exemplo 5. Calcule o volume do sólido E que fica acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$ (Veja a Figura 9).

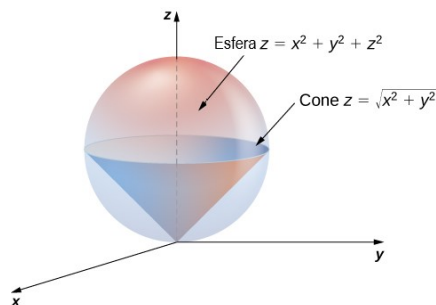


Figura 14:

Resolução. No Exemplo 3 calculamos esta integral usando coordenadas cilíndricas. Desta vez usaremos coordenadas esféricas que como veremos será mais vantajoso. Note que a esfera que passa pela origem e tem centro $(0, 0, 1/2)$ tem equação em coordenadas esféricas dada por

$$\rho^2 = \rho \cos \phi \quad \text{ou} \quad \rho = \cos \phi$$

O cone pode ser escrito em coordenadas esféricas como

$$\rho \cos \phi = z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta} = \rho \sin \phi$$

Ou seja $\cos \phi = \sin \phi$, implicando

$$\phi = \frac{\pi}{4}$$

Portanto a descrição de E em coordenadas esféricas é

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi/4, 0 \leq \rho \leq \cos \phi\}$$

A Figura 15 mostra como E é varrido se integramos primeiro em relação a ρ , depois em ϕ , e então em relação a θ .

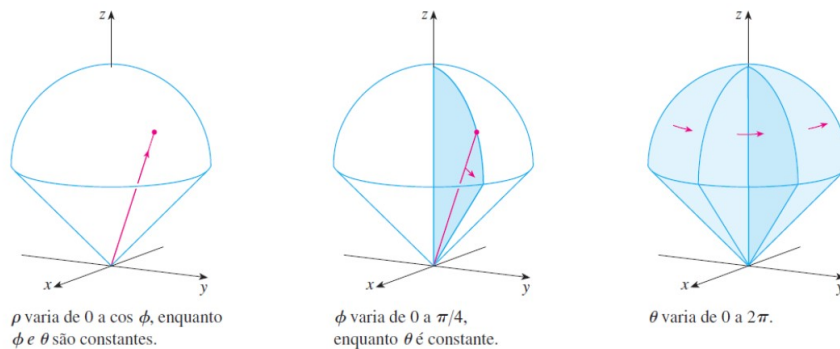


Figura 15:

O volume de E é

$$\begin{aligned}
 V(E) &= \iiint_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \sin \phi \left(\frac{\rho^3}{3} \right) \Big|_0^{\cos \phi} d\phi \\
 &= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \sin \phi \cos^3 \phi \, d\phi \\
 &= \frac{2\pi}{3} \left(-\frac{\cos^4 \phi}{4} \right) \Big|_0^{\pi/4} \\
 &= \frac{\pi}{8}
 \end{aligned}$$