

O teorema de Hopf-Rinow

A partir de agora M denotará uma variedade Riemanniana conexa.

Definição 1. Dizemos que M é *geodesicamente completa* se, para cada ponto $p \in M$, a aplicação exponencial \exp_p está definida em todo o espaço tangente T_pM , i.e., se toda geodésica $\gamma(t)$ partindo de p está definida para todos os valores $t \in \mathbb{R}$.

O espaço Euclidiano \mathbb{R}^n satisfaz trivialmente esta condição, pois suas geodésicas são retas. O semi-plano superior $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ não é geodesicamente completo em relação à métrica Euclidiana $dx^2 + dy^2$. No entanto, é geodesicamente completo em relação à métrica hiperbólica $\frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$.

A fim de provar o teorema de Hopf-Rinow, provaremos inicialmente dois lemas auxiliares.

Lema 2. Considere dois pontos distintos $x, y \in M$. Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe um ponto z na esfera geodésica $S_\epsilon(x)$ tal que

$$d(x, z) + d(z, y) = d(x, y). \quad (2.1)$$

Demonstração. Escolha $0 < \epsilon < d(x, y)$ suficientemente pequeno tal que $\exp_x(B_\epsilon(0_x))$ seja uma vizinhança normal de x . Como $S_\epsilon(x) = \exp_x(S_\epsilon(0_x))$ é compacto, existe $z \in S_\epsilon(x)$ tal que $d(y, S_\epsilon(x)) = d(y, z)$. Considere agora uma curva diferenciável por partes $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ ligando x e y . Como $d(x, y) > \epsilon$, a curva γ intercepta $S_\epsilon(x)$ em algum ponto $\gamma(t_0)$. Então

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= l(\gamma|_{[0, t_0]}) + l(\gamma|_{[t_0, 1]}) \\ &\geq d(x, \gamma(t_0)) + d(\gamma(t_0), y) \\ &\geq d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

Como γ foi escolhida de forma arbitrária, isso implica que

$$d(x, y) \geq d(x, z) + d(z, y).$$

A igualdade (2.1) segue agora da desigualdade triangular. \square

Lema 3. Considere um ponto $p \in M$ para o qual a aplicação exponencial \exp_p está definida em todo o espaço tangente T_pM . Então, todo ponto de M pode ser ligado a p por uma geodésica minimizante.

Demonstração. Dado um ponto $q \in M$, segue do Lema 2 que, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $p_0 \in M$ tal que

$$d(p, p_0) = \epsilon \quad \text{e} \quad d(p, p_0) + d(p_0, q) = d(p, q).$$

Seja $v \in T_p M$ o vetor unitário tal que $\exp_p(\epsilon v) = p_0$ e considere a curva $\gamma(t) = \exp_p(tv)$. Temos que γ é uma geodésica em M definida em todo \mathbb{R} . Afirmamos que $\gamma(d(p, q)) = q$. Considere o conjunto

$$I = \{t \in \mathbb{R} : d(p, q) = t + d(\gamma(t), q)\}.$$

Note que $0, \epsilon \in I$, logo $I \neq \emptyset$. Seja

$$T = \sup I \cap [0, d(p, q)].$$

Como $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, tem-se que I é fechado, logo $T \in I$. Se mostrarmos que $T = d(p, q)$, o resultado seguirá. Suponha, por absurdo, que $T < d(p, q)$. Então, podemos aplicar o Lema 2 aos pontos $\gamma(T)$ e q a fim de encontrar $\delta > 0$ e $q_0 \in M$ tais que

$$d(\gamma(T), q_0) = \delta \quad \text{e} \quad d(\gamma(T), q_0) + d(q_0, q) = d(\gamma(T), q). \quad (3.1)$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(p, q_0) &\geq d(p, q) - d(q_0, q) \\ &= d(p, q) - (d(\gamma(T), q) - d(\gamma(T), q_0)) \\ &= (d(p, q) - d(\gamma(T), q)) + d(\gamma(T), q_0) \\ &= T + \delta, \end{aligned} \quad (3.2)$$

pois $T \in I$. Seja η a única geodésica minimizante ligando $\gamma(T)$ e q_0 . Como a concatenação de $\gamma|_{[0, T]}$ e η é uma curva diferenciável por partes de comprimento $T + \delta$, ligando p e q_0 , segue de (3.2) que

$$d(p, q_0) = T + \delta.$$

Por outro lado, a concatenação é uma curva minimizante de modo que, pelos Lema ?? e Teorema ??, ela deve ser geodésica, logo diferenciável. Devido à unicidade das geodésicas, com fixadas condições iniciais, a curva η estende a curva $\gamma|_{[0, T]}$ como uma geodésica e, assim,

$$\gamma(T + \delta) = \eta(\delta) = q_0. \quad (3.3)$$

Usando (3.1) e (3.3), temos:

$$\begin{aligned} d(q, \gamma(T + \delta)) + T + \delta &= d(q, q_0) + d(\gamma(T), q_0) + T \\ &= d(\gamma(T), q) + T \\ &= d(p, q), \end{aligned}$$

e isso implica que $T + \delta \in I$, o que é uma contradição. Assim, devemos ter $T = d(p, q)$. \square

Corolário 4. Se M é geodesicamente completa, então quaisquer dois pontos de M podem ser ligados por uma geodésica minimizante.

Teorema 5 (Hopf-Rinow). *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) M é geodesicamente completa.
- (b) Para todo $p \in M$, a aplicação \exp_p está definida em todo T_pM .
- (c) Para algum $p \in M$, a aplicação \exp_p está definida em todo T_pM .
- (d) Todo subconjunto fechado e limitado de (M, d) é compacto.
- (e) (M, d) é completo como espaço métrico.

Demonstração. As implicações (a) \Rightarrow (b) e (b) \Rightarrow (c) são imediatas, enquanto que (d) \Rightarrow (e) segue da teoria de espaços métricos. Provemos, inicialmente, (c) \Rightarrow (d). Seja $K \subset M$ um subconjunto fechado e limitado. Como K é limitado, existe $R > 0$ tal que $\sup_{x \in K} \{d(x, p)\} < R$. Por outro lado, pela hipótese e pelo Lema 3, segue que, para todo ponto $q \in K$, existe uma geodésica minimizante γ ligando p e q . Note que

$$l(\gamma) = d(p, q) < R.$$

Isso mostra que $K \subset \exp_p(B(0_p; R))$, logo $K \subset \exp_p(\overline{B(0_p; R)})$, mostrando que K é compacto. Finalmente, mostremos a implicação (e) \Rightarrow (a). Seja γ uma geodésica em M , com $\|\gamma'(t)\| = 1$. Pelo teorema de existência e unicidade das soluções das equações diferenciais de segunda ordem, o intervalo maximal de definição de γ é aberto, digamos (a, b) , onde $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Afirmamos que $a = -\infty$ e $b = +\infty$. De fato, suponhamos que $b < +\infty$. Escolha uma sequência (t_n) em (a, b) , convergindo para b . Como

$$d(\gamma(t_m), \gamma(t_n)) \leq l(\gamma|_{[t_m, t_n]}) = t_n - t_m,$$

para $n > m$, concluímos que a sequência $(\gamma(t_n))$ é de Cauchy, logo converge para algum ponto $p \in M$, em virtude da hipótese (e). Seja U uma vizinhança totalmente normal de p , dado pela Proposição ??, tal que toda geodésica partindo de um ponto de U esteja definida em um intervalo aberto $(-\epsilon, \epsilon)$, para algum $\epsilon > 0$. Escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|t_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad \gamma(t_n) \in U.$$

Assim, $t_n + \epsilon > b + \frac{\epsilon}{2}$, logo a geodésica γ pode ser estendida ao intervalo aberto $(a, b + \epsilon/2)$, o que é uma contradição. Portanto, deve-se ter $b = +\infty$. Analogamente se mostra que $a = -\infty$, e isso finaliza a prova do teorema. \square

Corolário 6. Toda variedade Riemanniana compacta é completa.

O *diâmetro* de um espaço métrico (M, d) , denotado por $\text{diam}(M)$, é definido pondo

$$\text{diam}(M) = \sup\{d(x, y) : x, y \in M\}.$$

Corolário 7. Toda variedade Riemanniana completa de diâmetro limitado é compacta.

Proposição 8. Dados uma variedade Riemanniana M , uma geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ e um intervalo fechado $[a, b] \subset I$, valem as seguintes propriedades:

- (a) Se η é outra geodésica em M , com $l(\eta) = l(\gamma|_{[a, b]})$, então γ não é minimizante no intervalo $[a, b + \epsilon]$.
- (b) Se M é completa e não existe geodésica ligando $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$, com comprimento menor do que γ , então γ é minimizante em $[a, b]$.

Demonstração. Considere a curva $\alpha : [a, b + \epsilon] \rightarrow M$ definida por

$$\alpha(t) = \begin{cases} \eta(t), & \text{se } t \in [a, b] \\ \gamma(t), & \text{se } t \in [b, b + \epsilon] \end{cases},$$

onde $\epsilon > 0$ é tal que $b + \epsilon \in I$. Como η e γ são geodésicas distintas, α não é diferenciável em $t = b$. Disso decorre que α não é minimizante no intervalo $[a, b + \epsilon]$. Como α e γ têm mesmo comprimento em $[a, b + \epsilon]$, isso implica que γ não é minimizante neste intervalo, provando o item (a). Finalmente, se M é completa existe, em virtude do Lema 3, uma geodésica minimizante α ligando $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$. Como não existe geodésica ligando $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$, de comprimento menor do que a de γ , então α e γ têm mesmo comprimento, implicando que γ também é geodésica minimizante. \square