

Posição relativa e interseção de retas e planos

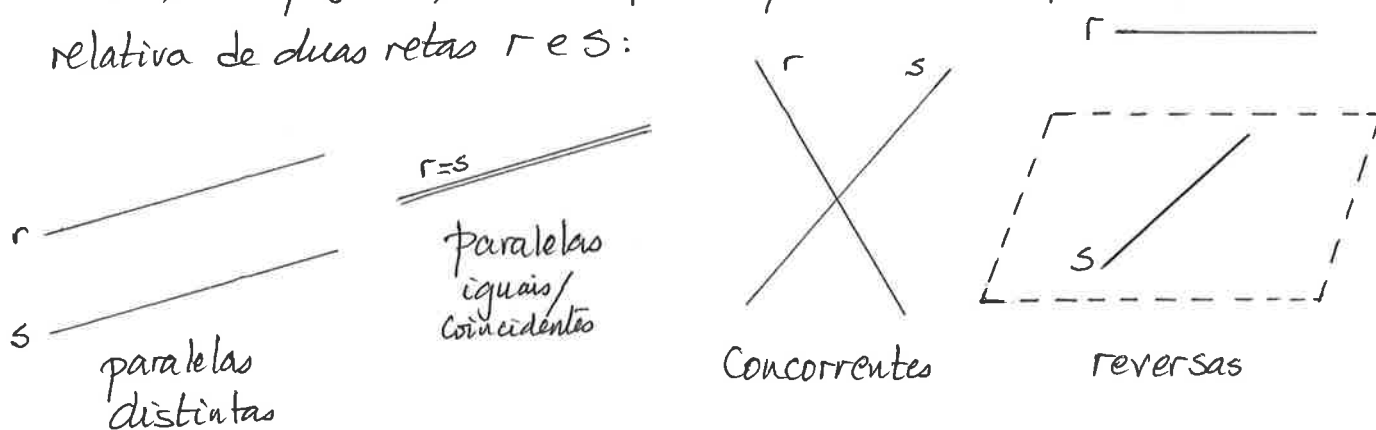
Dizemos que duas retas r e s são paralelas se elas possuem vetores diretores paralelos.

Duas retas paralelas podem ser distintas ou coincidentes.

Se elas são paralelas distintas, então elas não são concorrentes.

Podemos ter em $\mathbb{E}^3$ retas não paralelas e não concorrentes. chamamos tais retas de retas reversas.*

Então, no espaço $\mathbb{E}^3$, temos quatro possibilidades para posição relativa de duas retas r e s :



Sejam $\vec{r}$ e $\vec{s}$ vetores diretores de r e s respectivamente, e sejam A um ponto da reta r e B um ponto da reta s .

(1) Se $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são LI, então

r e s são reversas $\Leftrightarrow \vec{r}, \vec{s}, \vec{AB}$ são LI

r e s são concorrentes $\Leftrightarrow \vec{r}, \vec{s}, \vec{AB}$ são LD.

(2) se $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são LD, então

r e s são distintas $\Leftrightarrow A \in r \Rightarrow A \notin s$

r e s são idênticas $\Leftrightarrow A \in r \Rightarrow A \in s$

* Reversas significa que existe um plano π que contém a reta s e que é paralelo a reta r , com $r \not\subset \pi$.

Exemplo

Vamos verificar se as retas, dadas na forma paramétrica

$$r: \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = 9 - 4\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

são concorrentes, paralelas ou reversas.

Temos $\vec{r} = (1, -1, 1)$ e $\vec{s} = (-4, 1, -2)$, Como eles são LI. as retas r e s são reversas ou concorrentes.

Seja $A = (4, 1, 1) \in r$ e $B = (9, 2, 2)$, daí $\vec{AB} = (5, 1, 1)$

Temos

$$\begin{vmatrix} \vec{r} & \vec{s} & \vec{AB} \\ 1 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{portanto } r \text{ e } s \text{ são concorrentes.}$$

Para considerar a interseção de r e s é necessário indicar os parâmetros nas suas equações com letras diferentes:

$$r: \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = 9 - 4\mu \\ y = 2 + \mu \\ z = 2 - 2\mu \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$$

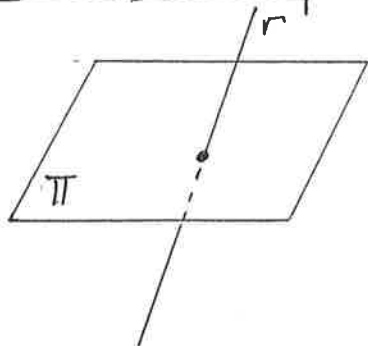
$$X = (x, y, z) \in r \cap s \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + \lambda = 9 - 4\mu \\ 1 - \lambda = 2 + \mu \\ 1 + \lambda = 2 - 2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 4\mu = 5 & (1) \\ \lambda + \mu = -1 & (2) \\ \lambda + 2\mu = 1 & (3) \end{cases}$$

[Observe que $3(3) - 2(2): \lambda + 4\mu = 5$]

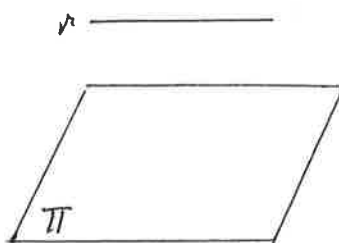
Temos $(1) - (2): 3\mu = 6 \Rightarrow \mu = 2$. Substituindo em (2) dá $\lambda = -3$.

Portanto as retas r e s se intersectam no ponto $(1, 4, -2)$.

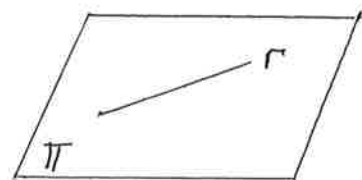
Posição relativa de reta e plano



r e π são transversais.



r é paralela a π



r está contida em π .

Exemplo

Seja r uma reta dada por $r: X = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 3), \lambda \in \mathbb{R}$ e π um plano com equação geral $x + y + z = 20$.

Um ponto $X \in r \cap \pi$ se, e somente se, as coordenadas

$X = (x, y, z) = (1 + 2\lambda, \lambda, 1 + 3\lambda)$ de X satisfazem a equação geral do plano π , ou seja, se, e somente se,

$$(1 + 2\lambda) + \lambda + (1 + 3\lambda) = 20 \Leftrightarrow 6\lambda = 18 \Leftrightarrow \lambda = 3.$$

Logo r e π são transversais e se intersectam no ponto $(7, 3, 10)$.

Proposição

Seja $ax + by + cz + d = 0$ uma equação geral de um plano π e $\vec{u} = (m, n, p)$. Então $\vec{u}$ é paralelo a π se, e somente se,

$$am + bn + cp = 0.$$

Demonstração

Seja $A = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de π , então

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0.$$

O vetor $\vec{u}$ é paralelo ao plano π se, e somente se, o ponto $B = A + \vec{u}$ pertence a π . Como $B = (x_0 + m, y_0 + n, z_0 + p)$,

$$\begin{aligned} \vec{u} \parallel \pi &\Leftrightarrow a(x_0 + m) + b(y_0 + n) + c(z_0 + p) + d = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}_{=0} + am + bn + cp = 0 \\ &\Leftrightarrow am + bn + cp = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Corolário

Seja $ax + by + cz + d = 0$ uma equação geral de um plano π , A um ponto de uma reta r e $\vec{r} = (m, n, p)$ um vetor diretor de r . Então

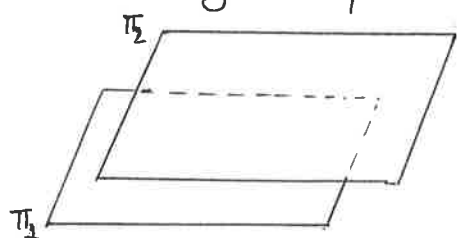
r e π são transversais $\Leftrightarrow am + bn + cp \neq 0$.

r é paralela a π $\Leftrightarrow am + bn + cp = 0$ e $A \notin \pi$.

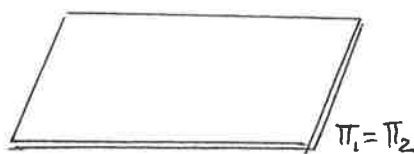
r está contida em π $\Leftrightarrow am + bn + cp = 0$ e $A \in \pi$.

Posição relativa de planos

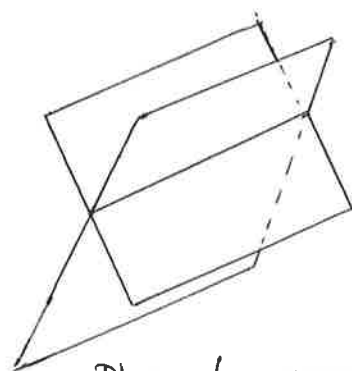
Temos as seguintes possibilidades para dois planos



planos paralelos
distintos



planos paralelos
coincidentes
(iguais)



Planos transversais

Proposição

Sejam $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ equações gerais de planos Π_1 e Π_2 respectivamente.

- (a) Os planos Π_1 e Π_2 são paralelos se, e somente se, a_1, b_1, c_1 e a_2, b_2, c_2 são proporcionais. Se d_1 e d_2 são na mesma proporção, então $\Pi_1 = \Pi_2$. Se não Π_1 e Π_2 são paralelos distintos.
- (b) Π_1 e Π_2 são transversais se, e somente se, a_1, b_1, c_1 e a_2, b_2, c_2 não são proporcionais.

Demonstração: Exercício.

Exemplo

Sejam dois planos $\Pi_1: x + 2y + 3z - 1 = 0$ $a_1 = 1, b_1 = 2, c_1 = 3$
 $\Pi_2: x - y + 2z = 0$ $a_2 = 1, b_2 = -1, c_2 = 2$

Como a_1, b_1, c_1 e a_2, b_2, c_2 não são proporcionais, os planos Π_1 e Π_2 são transversais. Vamos achar o conjunto $\Pi_1 \cap \Pi_2$.

$$\text{Um ponto } X = (x, y, z) \in \Pi_1 \cap \Pi_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z - 1 = 0 & (1) \\ x - y + 2z = 0 & (2) \end{cases}$$

Temos um sistema com duas equações e três incógnitas (i.e., um sistema indeterminado), Existem infinitas soluções.

Podemos pensar em y "como parâmetro" e resolver em x e z .

então

$$\begin{cases} x+2y+3z-1=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3z=1-2y \\ x+2z=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2+7y \\ y=1-3y \end{cases}, y \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2+7y \\ y=y \\ z=1-3y \end{cases}, y \in \mathbb{R}$$

Portanto $\Pi_1 \cap \Pi_2$ é a reta dada na forma paramétrica por

$$r: \begin{cases} x=-2+7\lambda \\ y=\lambda \\ z=1-3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{trocando de letra para indicar o parâmetro})$$

O sistema

$$r: \begin{cases} x+2y+3z-1=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases} \quad \text{chama-se sistema de equações da reta } r \text{ na forma planar.}$$

De modo geral, se a_1, b_1, c_1 e a_2, b_2, c_2 não são proporcionais o sistema

$$r: \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases} \quad \text{descreve uma reta (pois é interseção de dois planos transversais) e é chamado sistema de equações de } r \text{ na forma planar}$$

Proposição Um vetor $\vec{u}=(m,n,p)$ é paralelo a $r: \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$

$$\text{Se, e somente se, } \begin{cases} a_1m+b_1n+c_1p=0 \\ a_2m+b_2n+c_2p=0 \end{cases}$$

Demonstração: aplique a proposição na página 57.

Feixe de planos

Um feixe de planos é uma família de planos.

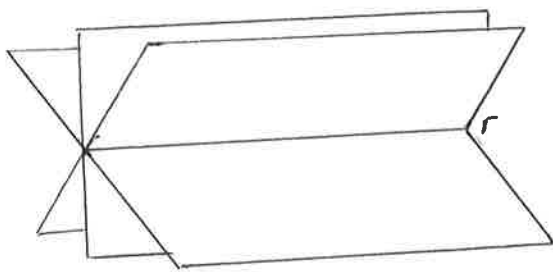
Vamos ver dois exemplos de feixes de planos.

① Feixe de planos paralelos a um plano Π

Se Π é dado por $ax+by+cz+d=0$, então a equação

$ax+by+cz+\alpha=0$, descreve, quando α percorre $\mathbb{R}$, o feixe de planos paralelos a Π . (Exercício)

⑥ Feixes de planos que contêm uma reta r



Proposição seja r a reta de equações planares

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

O feixe de planos que contém r pode ser descrito pela equação

$$\alpha(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \beta(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

com α, β percorrendo o conjunto $\mathbb{R}$, sobe a condição $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

(Podemos supor $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.)

Exemplo

Obtenha uma equação do plano que contém o ponto $(2, 0, 0)$ e a reta de interseção dos planos $\pi_1: 3x - 2y - z - 3 = 0$ e

$$\pi_2: 2x + y + 4z - 2 = 0$$

Solução: O plano em questão é um elemento do feixe de planos que contém a reta $r: \begin{cases} 3x - 2y - z - 3 = 0 \\ 2x + y + 4z - 2 = 0 \end{cases}$. Portanto tem equação

$$\pi: \alpha(3x - 2y - z - 3) + \beta(2x + y + 4z - 2) = 0 \quad \text{para alguns escalares } \alpha, \beta \text{ com } \alpha^2 + \beta^2 \neq 0.$$

Como $(2, 0, 0)$ pertence a π , temos

$$3\alpha + 2\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -\frac{3}{2}\alpha, \text{ com } \alpha \neq 0.$$

Logo uma equação de π é

$$\alpha \left[(3x - 2y - z - 3) - \frac{3}{2}(2x + y + 4z - 2) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha [2(3x - 2y - z - 3) - 3(2x + y + 4z - 2)] = 0$$

$$\stackrel{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} -7y - 14z = 0 \Leftrightarrow y + 2z = 0.$$

Vetor normal a um plano

Qualquer vetor não nulo ortogonal a um plano π chama-se vetor normal a π .

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores diretores de π . Um vetor $\vec{n}$ é um vetor normal a π se, e somente se, $\vec{n}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.

Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI, segue que

$$\vec{n} = \alpha \vec{u} \wedge \vec{v}, \text{ para } \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0.$$

Proposição Se o sistema de coordenadas é ortogonal, então $\vec{n} = (a, b, c)$ é um vetor normal a um plano π se, e somente se, π tem equação geral da forma

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Demonstração

Suponha que π tem equação geral $ax + by + cz + d = 0$.

Vimos que $\vec{u} = (m, n, p)$ é paralelo a π se, e somente se, $am + bn + cp = 0$.

Isto é equivalente a $(a, b, c) \cdot (m, n, p) = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$.

Logo $\vec{n} = (a, b, c)$ é normal a π .

Agora seja $A = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de π e $\vec{n} = (a, b, c)$ um vetor normal a π .

$$X = (x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{AX} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz - \underbrace{ax_0 - by_0 - cz_0}_d = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0,$$

ou seja, uma equação geral de π é da forma $ax + by + cz + d = 0$.

Observação A proposição acima não vale se o sistema de coordenadas não é ortogonal.

Exemplo Seja $B=(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal e $E=(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

Uma outra base com $\vec{e}_1=\vec{i}$, $\vec{e}_2=\vec{j}$, $\vec{e}_3=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

Seja $\Sigma=(0, E)$ um sistema de coordenadas. Obtenha um vetor normal ao plano $\pi[z=0]_\Sigma$.

Solução

os vetores $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ são vetores directores do plano π :

$(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ são paralelos a π pela proposição na página 57.

Logo $\vec{k}$ é um vetor normal a π .

Temos $\vec{k} = \vec{e}_3 - \vec{i} - \vec{j} = \vec{e}_3 - \vec{e}_1 - \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$

Ou seja um vetor normal a π tem coordenadas $\vec{n}=(-1, -1, 1)_E$.

Exemplo Seja $\Sigma=(0, B)$ um sistema ortogonal de coordenadas.

Obtenha uma equação geral do plano π que contém o ponto

$A=(1, 1, 2)$ e que é paralelo ao plano de equação geral $x-y+2z+1=0$.