SMA0355 - Aula 8 - 26.04.2022
Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

Objetivos de aprendizado

1. Avaliar uma integral tripla mudando para coordenadas cilíndricas.
2. Avaliar uma integral tripla mudando para coordenadas esféricas.

Nas aulas anteriores mostramos como converter uma integral dupla em coordenadas retangulares em uma integral dupla em coordenadas polares para lidar mais convenientemente com problemas envolvendo simetria circular. Uma situação semelhante ocorre com integrais triplas, mas aqui precisamos distinguir entre simetria cilíndrica e simetria esférica. Nesta aula, convertemos integrais triplas em coordenadas retangulares em integrais triplas em coordenadas cilíndricas ou esféricas.

Revisão de Coordenadas Cilíndricas

Como vimos anteriormente, no espaço bidimensional $\mathbb{R}^2$, um ponto com coordenadas retangulares (x, y) tem representação em coordenadas polares dada por (r, θ), onde

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

com $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\theta = \arctan(y/x)$, se $x \neq 0$, e $\theta \in \{\frac{\pi}{2} \pm k\pi : k \in \mathbb{N}\}$, se $x = 0$.

No espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$, um ponto P com coordenadas retangulares (x, y, z) é representado em coordenadas cilíndricas por (r, θ, z), onde r e θ são as coordenadas polares da projeção de P no plano xy e z é a distância orientada do plano xy a P, conforme mostrado na figura a seguir.

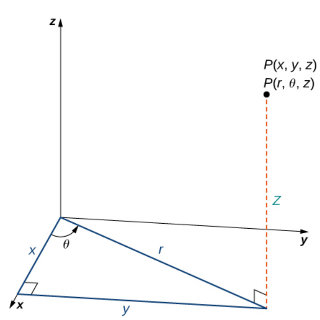

Figura 1:

Para converter de coordenadas cilíndricas, usamos as relações

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

enquanto que para converter de coordenadas retangulares para cilíndricas, usamos

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = y/x \\ z = z \end{cases}$$

Vamos considerar as diferenças entre coordenadas retangulares e cilíndricas observando as superfícies geradas quando cada uma das coordenadas é mantida constante. Se c é uma constante, então em coordenadas retangulares, as superfícies da forma $x = c$, $y = c$ ou $z = c$ são todas planas. Planos dessas formas são paralelos ao plano yz, ao plano xz e ao plano xy, respectivamente. Quando convertemos em coordenadas cilíndricas, a coordenada z não muda. Portanto, em coordenadas cilíndricas, superfícies da forma $z = c$ são planos paralelos ao plano xy. Agora, vamos pensar em superfícies da forma $r = c$. Os pontos nessas superfícies estão a uma distância fixa do eixo z. Em outras palavras, essas superfícies são cilindros circulares verticais. Por último, e quanto à $\theta = c$? Os pontos em uma superfície da forma $\theta = c$ estão em um ângulo fixo do eixo x, o que nos dá um semiplano que começa no eixo z (Figura 2 e Figura 3).

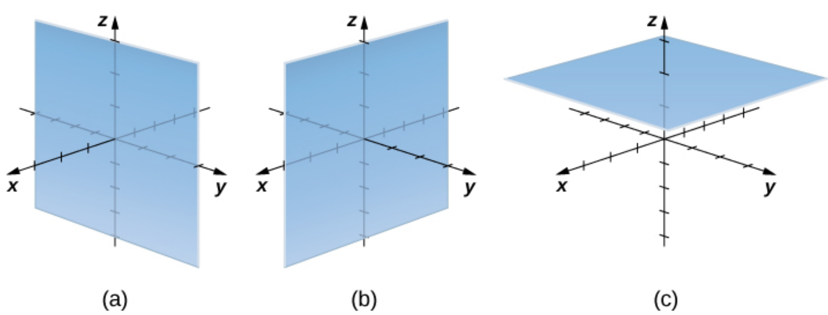

Figura 2: Em coordenadas retangulares, (a) superfícies da forma $x = c$ são planos paralelos ao plano yz, (b) superfícies da forma $y = c$ são planos paralelos ao plano xz e (c) superfícies da forma $z = c$ são planos paralelos ao plano xy.

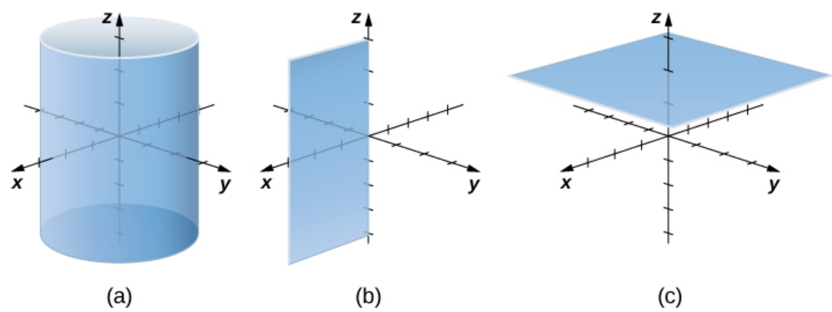

Figura 3: Em coordenadas cilíndricas, (a) superfícies da forma $r = c$ são cilindros verticais de raio C, (b) superfícies da forma $\theta = c$ são semiplanos no ângulo c do eixo x, e (c) superfícies de a forma $z = c$ são planos paralelos ao plano xy.

Exemplo 1. Descreva as superfícies com as equações cilíndricas dadas.

a) $\theta = \pi/4$

b) $r^2 + z^2 = 9$

c) $|z| = r$

Resolução. a) Quando o ângulo θ é mantido constante enquanto r e z podem variar, o resultado é um semiplano (veja a Figura 4).

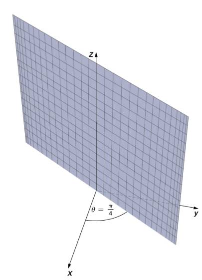

Figura 4: Em coordenadas cilindricas, a equação $\theta = \pi/4$ descreve um semiplano.

b) Substitua $r^2 = x^2 + y^2$ na equação $r^2 + z^2 = 9$ para expressar a forma retangular da equação: $x^2+y^2+z^2 = 9$. Esta equação descreve uma esfera centrada na origem com raio 3 (veja a Figura 5).

c) A equação diz que o valor $|z|$, ou altura, de cada ponto da superfície é o mesmo que r, a distância do ponto ao eixo z. Como θ não aparece, essa coordenada pode variar. Assim, qualquer corte horizontal no plano $|z| = k$ é um círculo de raio k. Esses cortes sugerem que a superfície é um cone. Essa previsão pode ser confirmada

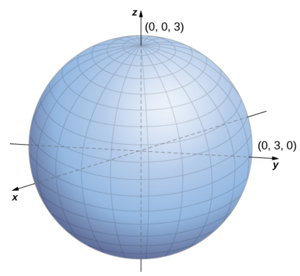

Figura 5: A esfera centrada na origem com raio 3 pode ser descrita pela equação cilíndrica $r^2 + z^2 = 9$.

convertendo a equação para coordenadas retangulares. De $|z| = r$, temos $r^2 = z^2$. Substitua $r^2 = x^2 + y^2$ nessa equação para obter

$$z^2 = r^2 = x^2 + y^2$$

que é a equação de cone circular cujo eixo é o eixo z (veja a Figura 6)

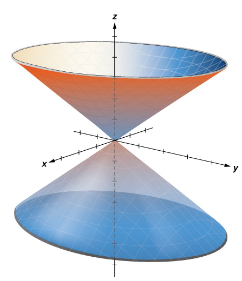

Figura 6: Os traços em planos paralelos ao plano xy são círculos. O raio dos círculos aumenta à medida que $|z|$ aumenta.

Coordenadas cilíndricas são úteis em problemas que envolvem simetria em torno de um eixo e o eixo z é escolhido de modo a coincidir com o eixo de simetria. Por exemplo, o eixo do cilindro circular com equação cartesiana $x^2 + y^2 = c^2$ é o eixo z. Em coordenadas cilíndricas, este cilindro tem a equação muito simples $r = c$. Esta é a razão para o nome coordenadas "cilíndricas".

Cálculo de Integrais Triplas com Coordenadas Cilíndricas

Suponha que E seja uma região no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$ do tipo 1 (veja a Figura 7),

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

cuja projeção D no plano xy tenha uma representação conveniente em coordenadas polares (veja a Figura 7), a saber,

$$D = \{(r, \theta) \mid h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta),\ \alpha \leq \theta \leq \beta\}.$$

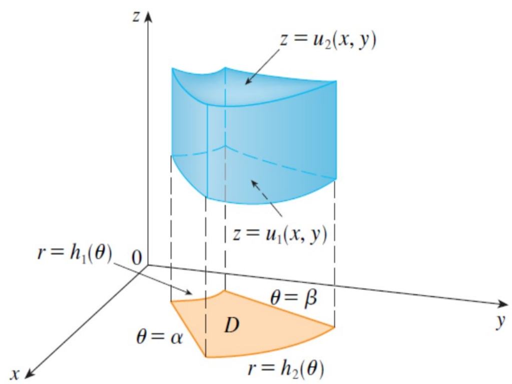

Figura 7:

Suponha que $f(x, y, z)$ seja contínua em E. Sabemos da Aula 7 que

$$\iiint_E f(x, y, z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)dz\right] dA$$

Também sabemos como calcular integrais duplas em coordenadas polares. Assim,

$$\boxed{\iiint_E f(x, y, z)dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{u_2(r\cos\theta, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\, dz\, dr\, d\theta}$$

Exemplo 2. Um sólido Eestá contido no cilindro $x^2 + y^2 = 1$, abaixo do plano $z = 4$ e acima do paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ (Veja a Figura 8). A densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo do cilindro. Determine a massa de E.

Resolução. Em coordenadas cilíndricas, o cilindro é $r = 1$ e o paraboloide é $z = 1 - r^2$ e podemos escrever

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq 1,\ 1 - r^2 \leq z \leq 4\}$$

Como a densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo do cilindro (eixo z), a função densidade é

$$\rho(x, y, z) = K\sqrt{x^2 + z^2} = kr,$$

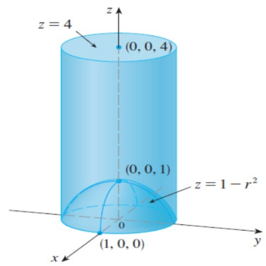

Figura 8:

sendo K a constante de proporcionalidade. Portanto, a massa de E é

$$\begin{aligned} m &= \iiint_E K\sqrt{x^2+z^2}\,dV \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-r^2}^4 (Kr)r\,dz\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 Kr^2\left[4-(1-r^2)\right]\,dr\,d\theta \\ &= K\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (3r^2+r^4)\,dr \\ &= 2K\pi\left(r^3+\frac{r^5}{5}\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{12K\pi}{5}. \end{aligned}$$

Exemplo 3. Calcule o volume do sólido E que fica acima do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e abaixo da esfera $x^2+y^2+z^2=z$ (Veja a Figura 9).

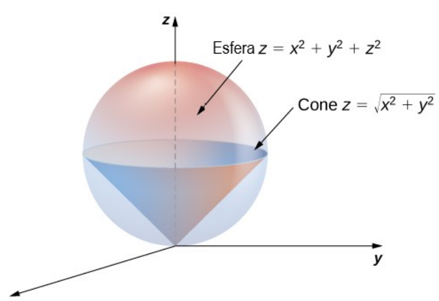

Figura 9:

Resolução. Observe que a esfera passa pela origem e tem centro em $(0,0,1/2)$. A esfera intercepta o cone na origem $(0,0,0)$ e na circunferência no plano $z=1/2$ de centro $(0,0,1/2)$ e raio $1/2$. De fato, para (x,y,z) pertence ao cone e a esfera, temos

$$z = \underbrace{x^2+y^2}_{z^2} + z^2 = 2z^2,$$

ou seja $z=0$ ou $z=1/2$. Isso resulta, $x=y=z=0$ ou $x^2+y^2=(1/2)^2$ e $z=1/2$. Escrevemos a equação da esfera em coordenadas cilíndricas como

$$r^2+z^2=z.$$

A equação do cone em coordenadas cilíndricas como

$$z=r.$$

Portanto a descrição do sólido E em coordenadas cilíndricas é

$$E=\{(r,\theta,z)\mid 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le 1/2,\ r\le z\le (1+\sqrt{1-4r^2})/2\}$$

O volume de E é

$$\begin{aligned}
V(E) = \iiint_E dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1/2}\int_r^{(1+\sqrt{1-4r^2})/2} r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{1/2}\left(\frac{1+\sqrt{1-4r^2}}{2}-r\right) r\,dr\,d\theta \\
&= 2\pi\int_0^{1/2}\left(\frac{r}{2}+\frac{r\sqrt{1-4r^2}}{2}-r^2\right)dr \\
&= 2\pi\left(\frac{r^2}{4}-\frac{(1-4r^2)^{3/2}}{24}-\frac{r^3}{3}\right)\Big|_{r=0}^{r=1/2} \\
&= \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$