

A estrutura de espaço métrico

O objetivo dessa seção é descrever a métrica Riemanniana em coordenadas normais. Mais precisamente, provaremos o Lema de Gauss que será usado para introduzir uma estrutura de espaço métrico na variedade Riemanniana. Isso possibilitará estudar distâncias e curvas que minimizam distâncias.

Fixado $p \in M$, sabemos que existem uma vizinhança W_p de 0_p em T_pM e uma vizinhança U_p de p em M de modo que $\exp_p : W_p \rightarrow U_p$ é um difeomorfismo. Para cada $\epsilon > 0$, com $B_\epsilon(0_p) \subset W_p$, a esfera $S_\epsilon(p) = \exp_p(S_\epsilon(0_p))$ é chamada de *esfera geodésica*, e para cada direção radial $v \in T_pM$, para a qual $\exp_p(v)$ está definido, a geodésica $\exp_p(tv)$ é usualmente chamada de *geodésica radial* determinada por v .

O resultado seguinte nos diz que a aplicação exponencial \exp_p é uma isometria radial, no sentido que ela preserva o produto interno desde que um dos vetores aponte na direção radial.

Lema 1 (Gauss). Fixado um ponto $p \in M$, considere um vetor $v \in T_pM$ para o qual $\exp_p(v)$ esteja definido. Então, qualquer que seja o vetor $w \in T_v(T_pM) \simeq T_pM$, tem-se

$$\langle d \exp_p(v) \cdot v, d \exp_p(v) \cdot w \rangle = \langle v, w \rangle. \quad (1.1)$$

Demonstração. Escrevamos w como sendo $w = w^T + w^\perp$, onde w^T é paralelo a v e w^\perp é ortogonal a v . Note, inicialmente, que a curva

$$t \mapsto \exp_p(tv) = \gamma_{p,v}(t)$$

é uma geodésica. Isso significa que o vetor velocidade dessa curva tem comprimento constante, i.e.,

$$t \mapsto \langle d \exp_p(tv) \cdot v, d \exp_p(tv) \cdot v \rangle = \text{const.}$$

Assim, o valor assumido por essa função em $t = 1$ é igual ao valor assumido em $t = 0$, para o qual sabemos que $d \exp_p(0_p) \cdot v = v$. Isso prova (1.1) quando $w = w^T$. Podemos então supor que $w = w^\perp \neq 0$. Como w é ortogonal a v , w é o vetor velocidade $w = v'(0)$ de alguma curva diferenciável

$$s \in (-\epsilon, \epsilon) \mapsto v(s) \in S_\epsilon(0_p),$$

com $v(0) = v$. Agora, por cada ponto dessa curva, considere o raio geodésico que sai de 0_p e atinge esse ponto. Em outras palavras, considere a superfície parametrizada dada por

$$f(t, s) = \exp_p(tv(s)),$$

com $0 \leq t \leq 1$ e $-\epsilon < s < \epsilon$. Observe que as curvas

$$t \mapsto f(t, s_0) \tag{1.2}$$

são geodésicas em M . Além disso, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(t, s) &= d \exp_p(tv(s)) \cdot v(s), \\ \frac{\partial f}{\partial s}(t, s) &= t d \exp_p(tv(s)) \cdot v'(s). \end{aligned}$$

Isso implica que

$$\langle d \exp_p(v) \cdot v, d \exp_p(v) \cdot w \rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}(1, 0), \frac{\partial f}{\partial s}(1, 0) \right\rangle.$$

Afirmamos agora que a função

$$t \mapsto \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}(t, 0), \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) \right\rangle$$

é constante. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle &= \left\langle \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right), \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{D}{ds} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \|v(s)\|^2 = 0, \end{aligned}$$

onde, na segunda igualdade, usamos o fato que as curvas em (1.2) são geodésicas e a simetria da derivada covariante (cf. Exercício .??). Portanto,

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}(1, 0), \frac{\partial f}{\partial s}(1, 0) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) \right\rangle = 0,$$

pois $\frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) = 0$, e isso finaliza a demonstração. \square

Decorre então do lema de Gauss que as geodésicas radiais, partindo de p , são sempre ortogonais às esferas geodésicas centradas em p .

Dado uma curva diferenciável por partes $\gamma: [a, b] \rightarrow M$, lembremos que o *comprimento* de γ , denotado por $l(\gamma)$, é definido pondo

$$l(\gamma) = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt.$$

Proposição 2. Dado um ponto $p \in M$, seja $\epsilon > 0$ de modo que o aberto $U = \exp_p(B_\epsilon(0_p))$ seja uma vizinhança normal de p . Então, para qualquer $x \in U$, existe uma única geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ de comprimento menor do que ϵ ligando p e x . Além disso, se $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ é outra curva diferenciável por partes, ligando p e x , então $l(\gamma) \leq l(\alpha)$, e vale a igualdade se, e somente se, $\gamma([a, b]) = \alpha([a, b])$.

Demonstração. Em virtude do Lema ??, existe um único vetor $v \in T_pM$, com $\|v\| < \epsilon$, tal que $\exp_p(v) = x$. Assim, se γ é a geodésica

$$\gamma_{p,v}(t) = \exp_p(tv), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

tem-se que γ é geodésica em M , ligando p e x , com comprimento menor do que ϵ . Considere agora outra curva diferenciável por partes $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ ligando p e x . Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\alpha(t) \neq p$, para todo $t > 0$ pois, do contrário, abandonaríamos o intervalo $[0, t_0]$, com $t_0 > 0$ satisfazendo $\alpha(t_0) = p$. Existem duas possibilidades:

Caso 1. Se $\alpha([0, 1]) \subset U$, e como \exp_p é um difeomorfismo em U , a curva $\alpha(t)$ pode ser escrita, univocamente, como

$$\alpha(t) = \exp_p(r(t) \cdot v(t)) = f(r(t), t), \quad t > 0,$$

onde $v : [0, 1] \rightarrow T_pM$ é uma curva diferenciável, satisfazendo $\|v(t)\| = 1$, e $r : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função positiva, diferenciável por partes. Note que a função $r(t)$ mede a distância da origem em T_pM , enquanto $v(t)$ descreve o movimento sobre a esfera unitária em T_pM . Então, exceto para um número finito de pontos, temos:

$$\alpha'(t) = r'(t) \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

O vetor $\frac{\partial f}{\partial r}$ é o vetor velocidade da geodésica radial $\gamma_v(r) = \exp_p(r \cdot v)$. Como tais geodésicas têm velocidade constante tem-se, em particular, que $\|\frac{\partial f}{\partial r}\| = 1$. Por outro lado, $\frac{\partial f}{\partial t}$ é um vetor tangente à esfera geodésica $S_r(p)$. Assim, em virtude do lema de Gauss, temos

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0.$$

Assim,

$$\|\alpha'(t)\|^2 = (r'(t))^2 \left\| \frac{\partial f}{\partial r} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|^2, \quad (2.1)$$

implicando que

$$\|\alpha'(t)\|^2 \geq (r'(t))^2.$$

Portanto,

$$\int_{\epsilon}^1 \|\alpha'(t)\| dt \geq \int_{\epsilon}^1 |r'(t)| dt \geq \int_{\epsilon}^1 r'(t) dt = r(1) - r(\epsilon).$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, obtemos $l(\alpha) \geq l(\gamma)$, pois $r(1) = l(\gamma)$.

Caso 2. Caso $\alpha([0, 1])$ não esteja contido em U , seja

$$t_0 = \inf\{t : \alpha(t) \in \partial U\}.$$

Novamente, usando o lema de Gauss, obtemos:

$$l(\alpha) \geq l(\alpha|_{[0, t_0]}) \geq \epsilon > l(\gamma).$$

Em qualquer caso, obtemos $l(\gamma) \leq l(\alpha)$. Se $l(\gamma) = l(\alpha)$, então estamos na situação em que $\alpha([0, 1]) \subset U$, e em virtude (2.1), tem-se $\left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\| = 0$. Isso significa que a direção $v(t)$ no espaço tangente não está mudando, ou seja, $v(t) = \text{const}$, de modo que $\alpha(t)$ simplifica para

$$\alpha(t) = \exp_p(r(t) \cdot v).$$

Isso significa que $\alpha(t)$ percorre o mesmo segmento de reta no espaço tangente que a geodésica γ , logo $\alpha([0, 1]) = \gamma([0, 1])$. \square

Dados dois pontos $x, y \in M$, denotemos por $C_{x,y}$ o conjunto de todas as curvas diferenciáveis por partes ligando x e y . Definimos então

$$d(x, y) = \inf\{l(\gamma) : \gamma \in C_{x,y}\}. \quad (2.2)$$

Teorema 3. *Se M é conexa, a função d em (2.2) define uma distância em M que induz a topologia da estrutura diferenciável de M .*

Demonstração. Observe, inicialmente, que a distância entre dois pontos é sempre finita. De fato, o conjunto dos pontos de M que podem ser ligados a um dado ponto, por uma curva diferenciável por partes, é aberto. Isso resulta numa partição de M por conjuntos abertos que, em virtude da conexidade de M , reduz-se a um único aberto. Observe agora que $d(x, y) = d(y, x)$, pois toda curva pode ser reparametrizada no sentido contrário. A desigualdade triangular $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ também vale pela justaposição de curvas, e $d(x, x) = 0$ vale usando-se uma curva constante. A fim de provar que d

é uma distância em M , resta mostrar que $d(x, y) > 0$ para $x \neq y$. Escolha $\epsilon > 0$ tal que $y \notin U$ e $U = \exp_x(B_\epsilon(0_x))$ é uma vizinhança normal de x , e seja $V = \exp_x(B_{\epsilon/2}(0_x))$. Se $\gamma \in C_{x,y}$ e $t_0 = \inf\{t : \gamma(t) \notin V\}$, então

$$l(\gamma) \geq l(\gamma|_{[0,t_0]}) \geq \frac{\epsilon}{2} > 0,$$

onde a segunda desigualdade acima é consequência da Proposição 2. Disso decorre que $d(x, x) > 0$. Em relação à topologia de M , observe que a Proposição 2 implica que, na vizinhança normal U de x , mais precisamente com $0 < r < \epsilon$, as esferas

$$S(x; r) = \{z \in M : d(z, x) = r\}$$

coincidem com as esferas geodésicas

$$S_r(x) = \{\exp_x(v) : \|v\| = r\}.$$

Em particular, as bolas abertas

$$B(x; r) = \{z \in M : d(z, x) < r\} \tag{3.1}$$

coincidem com as bolas geodésicas

$$B_r(x) = \{\exp_x(v) : \|v\| < r\}. \tag{3.2}$$

Como as bolas abertas em (3.1) constituem um sistema fundamental de vizinhanças de x para a topologia de (M, d) , e as bolas abertas em (3.2) constituem um sistema fundamental de vizinhanças de x para a topologia de M , como variedade diferenciável, e x é arbitrário, concluímos que a topologia induzida por d coincide com a topologia original de M , induzida da estrutura diferenciável. \square

Sobre vizinhanças totalmente normais temos o seguinte resultado, cuja demonstração segue diretamente do Lema ?? e da Proposição 2.

Corolário 4. Dado um ponto $p \in M$, considere um número $\epsilon > 0$ tal que $U = \exp_p(B_\epsilon(0_p))$ seja uma vizinhança totalmente normal de p . Então, para quaisquer $x, y \in U$, existe uma única geodésica γ , de comprimento menor que ϵ , ligando x e y . Além disso, o comprimento de γ é igual a distância entre x e y , e γ é a única curva diferenciável por partes em M com esta propriedade, a menos de reparametrização.

Finalizaremos esta seção discutindo a propriedade de minimização das geodésicas. Uma curva diferenciável por partes $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é dita ser *minimizante* se

$$l(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b)).$$

Lema 5. Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma curva minimizante. Então, a restrição $\gamma|_{[c, d]}$ a qualquer subintervalo $[c, d] \subset [a, b]$ também é minimizante.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que γ não seja minimizante em $[c, d]$. Isso significa que existe uma curva diferenciável por partes α , ligando $\gamma(c)$ e $\gamma(d)$, com comprimento menor da curva $\gamma|_{[c, d]}$. Considere a curva diferenciável por partes $c : [a, b] \rightarrow M$ construída trocando-se $\gamma|_{[c, d]}$ por α , e dada por

$$c(t) = \begin{cases} \gamma(t), & \text{se } t \in [a, c] \\ \alpha(t), & \text{se } t \in [c, d] \\ \gamma(t), & \text{se } t \in [d, b] \end{cases}.$$

Assim, c é uma curva diferenciável por partes ligando $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$, cujo comprimento é menor da curva γ , o que é uma contradição. Assim, γ é minimizante em $[c, d]$. \square

O teorema seguinte caracteriza as geodésicas como as curvas que são, localmente, minimizantes.

Teorema 6. *Uma curva diferenciável por partes $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é uma geodésica a menos de reparametrização se, e somente se, todo arco suficientemente pequeno de γ é uma curva minimizante.*

Demonstração. Todo arco suficientemente pequeno de γ está contido em uma vizinhança totalmente normal $U = \exp_p(B_\epsilon(0_p))$ de algum ponto $p \in M$. Porém, o comprimento de uma curva em U , de comprimento menor que ϵ , realiza a distância entre as extremidades da curva se, e somente se, a curva é uma geodésica, a menos de reparametrização, em virtude do Corolário 4. Como a propriedade de ser geodésica é um conceito local, isso finaliza a demonstração. \square

Observe que, como geodésicas são curvas diferenciáveis, segue do Lema 5 e do Teorema 6 que uma curva minimizante deve ser, necessariamente, diferenciável.