SMA0355 - Aula 7 - 19.04.2022
Integrais Triplas

Objetivos de aprendizado

1. Reconhecer quando uma função de três variáveis é integrável sobre uma caixa retangular.
2. Avaliar uma integral tripla expressando-a como uma integral iterada.
3. Reconhecer quando uma função de três variáveis é integrável sobre uma região limitada genérica.
4. Simplificar um cálculo alterando a ordem de integração de uma integral tripla.
5. Aplicar integrais triplas para o cálculo de volume, massa e momentos.

Em integrais duplas sobre regiões retangulares, discutimos a integral dupla de uma função $f(x, y)$ de duas variáveis sobre uma região retangular no plano. Nesta aula definimos a integral tripla de uma função $f(x, y, z)$ de três variáveis sobre uma caixa retangular sólida no espaço. Mais adiante, estendemos a definição para regiões mais gerais no espaço.

Definimos uma caixa retangular B em $\mathbb{R}^3$ como

$$B = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}.$$

Seguindo o procedimento semelhante ao que fizemos em integrais duplas sobre regiões retangulares, dividimos o intervalo $[a, b]$ em l subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual comprimento $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{l}$, dividimos o intervalo $[c, d]$ em m subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ de igual comprimento $\Delta y = y_j - y_{j-1} = \frac{d-c}{m}$, e dividimos o intervalo $[e, f]$ em n subintervalos $[z_{k-1}, z_k]$ de igual comprimento $\Delta z = z_k - z_{k-1} = \frac{f-e}{n}$. Então a caixa retangular B é subdividida em lmn subcaixas $B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$, como mostrado na Figura 1. Cada subcaixa tem volume $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$. Para cada i, j e k, considere um ponto amostral $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})$ em cada subcaixa B_{ijk} e forme a soma tripla de Riemann

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk}) \Delta V. \tag{1}$$

Definimos a integral tripla em termos do limite de uma soma tripla de Riemann, como fizemos para a integral dupla em termos de uma soma dupla de Riemann.

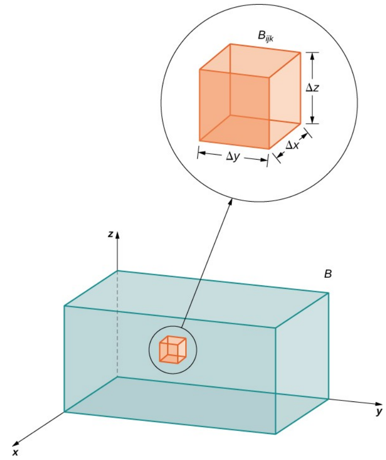

Figura 1:

Definição. A integral tripla de uma função $f(x,y,z)$ sobre uma caixa retangular B é definida como

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta V \qquad (2)$$

se o limite existir e for independente da escolha de $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ em cada B_{ijk}.

Quando a integral tripla existe em B, diz-se que a função $f(x,y,z)$ é integrável em B. Além disso, a integral tripla sempre existe se $f(x,y,z)$ é contínua em B. A continuidade é suficiente, mas não necessária; em outras palavras, f é limitada em B e contínua exceto possivelmente em uma reunião finita de conjuntos suaves[1] então f e integrável em B.

Agora que desenvolvemos o conceito da integral tripla, precisamos saber como calculá-la. Assim como no caso da integral dupla, o método prático para calcular integral tripla consiste em expressá-la como uma integral iterada como se segue.

Teorema de Fubini para Integrais Triplas. Se $f(x,y,z)$ é contínua em uma caixa retangular $B = [a,b]\times[c,d]\times[e,f]$, então

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)dxdydz.$$

[1] Um conjunto suave em $\mathbb{R}^3$ é a imagem de um conjunto compacto sob uma função $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^3$, $m=1$ ou $m=2$, e ϕ de classe C^1.

Para números reais a, b, c, d, e e f, a integral tripla iterada pode ser expressa em seis ordenações diferentes:

$$
\begin{aligned}
\int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x,y,z) dx dy dz &:= \int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y,z) dx \right) dy \right) dz \\
&= \int_c^d \left(\int_e^f \left(\int_a^b f(x,y,z) dx \right) dz \right) dy \\
&= \int_a^b \left(\int_e^f \left(\int_c^d f(x,y,z) dy \right) dz \right) dx \\
&= \int_e^f \left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y,z) dy \right) dx \right) dz \\
&= \int_c^d \left(\int_a^b \left(\int_e^f f(x,y,z) dz \right) dx \right) dy \\
&= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x,y,z) dz \right) dy \right) dx
\end{aligned}
$$

Exemplo 1. Calcule a integral tripla $\iiint_B (x + yz^2)dV$, onde $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 5, 2 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 1\}$.

Resolução. Podemos usar quaisquer das seis ordens de integração. Se escolhermos integrar em relação a x primeiro, depois y e depois z, obteremos

$$\begin{aligned}
\iiint_B (x + yz^2)dV &= \int_0^1 \int_2^4 \int_{-1}^5 (x + yz^2)dxdydz \qquad \text{(integre com relação a } x\text{)} \\
&= \int_0^1 \int_2^4 \left[(\frac{x^2}{2} + xyz^2)\Big|_{x=-1}^{x=5} \right] dydz \\
&= \int_0^1 \int_2^4 \left[12 + 6yz^2\right] dydz \qquad \text{(integre com relação a } y\text{)} \\
&= \int_0^1 \left[(12y + 3y^2z^2)\Big|_{y=2}^{y=4} \right] dz \\
&= \int_0^1 \left[24 + 36z^2\right] dz \qquad \text{(integre com relação a } z\text{)} \\
&= (24z + 12z^3)\Big|_{z=0}^{z=1} = 36.
\end{aligned}$$

Integrais triplas sobre uma região limitada geral

Dada $f(x, y, z)$ uma função definida uma região limitada genérica $E \subset \mathbb{R}^3$, considere B uma caixa retangular contendo E e defina uma extensão $\tilde{f}$ que coincide com f em E e se anula em $B \setminus E$. Por definição

$$\iiint_E f(x, y, z)dV = \iiint_B \tilde{f}(x, y, z)dV.$$

Esta integral existe se f for contínua e a fronteira de E está consiste de uma união finita de conjuntos suaves.

Vamos restringir nossa atenção às funções contínuas f e a certos tipos de regiões. Uma região $E \subset \mathbb{R}^3$ é dita ser do **tipo 1** se está contida entre os gráficos de duas funções contínuas, o seja,

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}.$$

onde D é a projeção de E sobre o plano xy, como mostrado na Figura 2.

Teorema. A integral tripla de uma função contínua $f(x, y, z)$ sobre a região limitada

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\},$$

onde D é a projeção de E sobre o plano xy, é

$$\iiint_E f(x, y, z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right] dA. \tag{3}$$

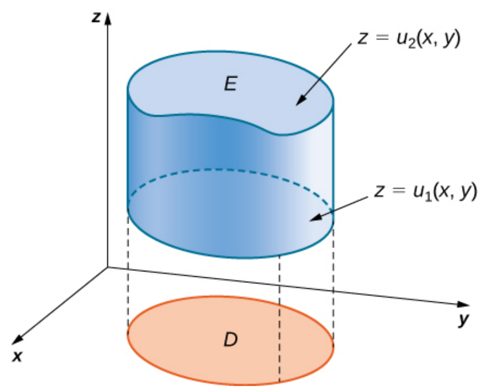

Figura 2: Uma região tipo 1

Observe que a região D em qualquer um dos planos pode ser do Tipo I ou Tipo II conforme descrito em Integrais Duplas sobre Regiões Gerais. Se D no plano xy é do Tipo I (Figura 3), então

$$E = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}.$$

Neste caso, a integral tripla se torna

$$\iiint_E f(x, y, z)dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)dzdydx.$$

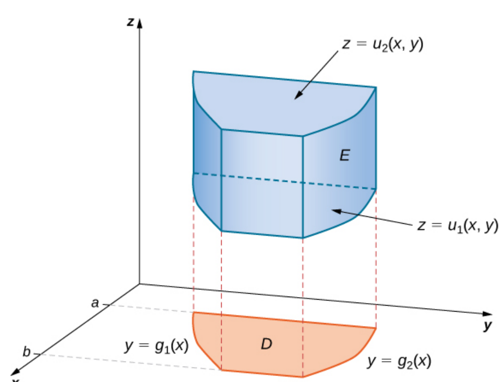

Figura 3: Uma região tipo 1 e a projeção D é tipo I

Se, por outro lado, D no plano xy é do Tipo II (Figura 4), então

$$E = \{(x, y, z) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

e a integral tripla fica

$$\iiint_E f(x, y, z)dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)dzdxdy.$$

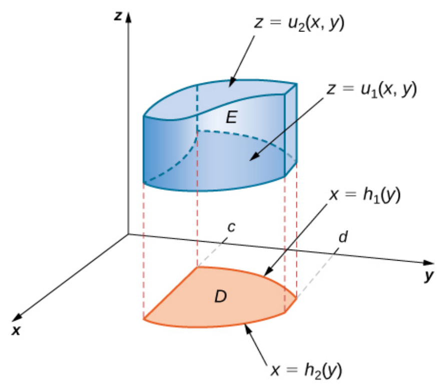

Figura 4: Uma região tipo 1 e a projeção D é tipo II

Uma região $E \subset \mathbb{R}^3$ é dita ser do **tipo 2** (Figura 5) se é da forma

$$E = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}.$$

onde D é a projeção de E sobre o plano yz. Neste caso, a integral tripla se torna

$$\iiint_E f(x, y, z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x, y, z)dx\right] dA.$$

Por fim, uma região $E \subset \mathbb{R}^3$ é dita ser do **tipo 3** (Figura 6) se é da forma

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D, u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}.$$

onde D é a projeção de E sobre o plano xz. Neste caso, a integral tripla se torna

$$\iiint_E f(x, y, z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x, y, z)dy\right] dA.$$

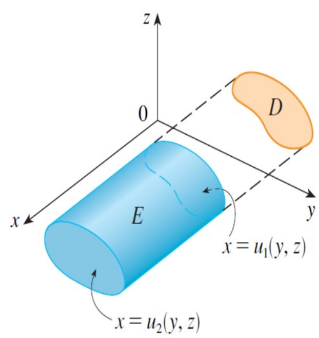

Figura 5: Uma região tipo 2

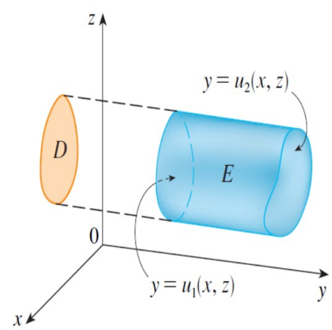

Figura 6: Uma região tipo 3

Exemplo 2. Calcule a integral tripla $\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} dV$, onde E é a região limitada pelo parabolóide $y = x^2 + z^2$ e pelo plano $y = 4$.

Resolução. A região de integração está mostrada na Figura 7 à esquerda. Vendo-a como tipo 1, precisamos considerar a sua projeção D_1 sobre o plano xy que está mostrada na Figura 7 à direita.

De $y = x^2 + z^2$, obtemos $z = \pm\sqrt{y - x^2}$. Portanto, E como tipo 1 é

$$E = \{(x, y, z) \mid -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4, -\sqrt{y - x^2} \leq z \leq \sqrt{y - x^2}\}.$$

Assim,

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} dV = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} \int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2 + z^2} dz dy dx.$$

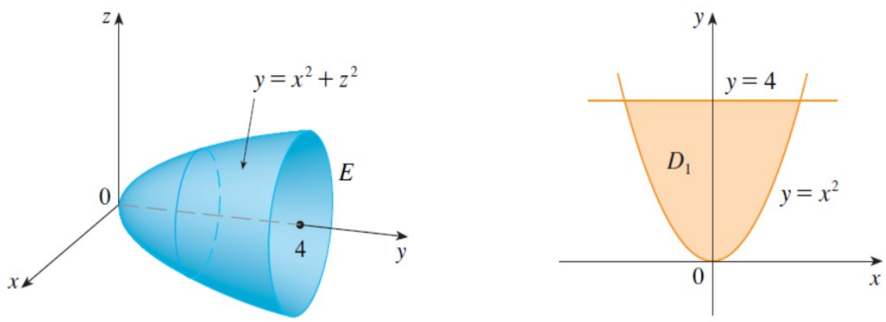

Figura 7: A figura à esquerda é a região de integração e a figura à direita é a projeção no plano xy

Apesar dessa expressão estar correta, é difícil de calculá-la. Vamos, em vez disso, considerar a projeção de E como tipo 3. Como tal, sua projeção D_3 no plano xz é o disco circular $x^2 + z^2 \leq 4$. Portanto, a descrição de E como tipo 3 é

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D_3, x^2 + z^2 \leq y \leq 4\}$$

e obtemos

$$\begin{aligned}\iiint_E \sqrt{x^2+z^2}dV &= \iint_{D_3} \left[\int_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2+z^2}\,dy\right] dA \\ &= \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2+z^2}dA.\end{aligned}$$

Apesar dessa última integral dupla poder ser escrita como

$$\iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2+z^2}dA = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2+z^2}\,dz\,dx$$

fica mais fácil mudar para coordenadas polares no plano xz: $x = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$, o que nos dá

$$\begin{aligned}\iiint_E \sqrt{x^2+z^2}dV &= \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2+z^2}dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2)rr\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4r^2 - r^4)\,dr = 2\pi \left(\frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\right)\Big|_0^2 \\ &= \frac{128\pi}{15}\end{aligned}$$