

7. Sequências de Cauchy

(32)

Definição: Uma sequência numérica (a_n) é dita ser uma sequência de Cauchy se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Isso significa que os termos da sequência, para valores suficientemente grandes dos índices, se aproximam arbitrariamente uns dos outros.

Proposição 1: Toda sequência de Cauchy é limitada.

Dem.: Dado uma sequência de Cauchy (a_n) , e tomando $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < 1.$$

Em particular, se $n \geq n_0$ então $|a_{n_0} - a_n| < 1$, ou seja, se $n \geq n_0$ então $a_n \in (a_{n_0} - 1, a_{n_0} + 1)$. Sejam α o menor e β o maior elemento do conjunto

$$A = \{a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}, a_{n_0} + 1\}$$

Isso implica que $a_n \in [\alpha, \beta]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, logo (a_n) é limitada. $\square$

Um dos objetivos desta seção é provar que ser de Cauchy é equivalente a ser convergente.

Proposição 2: Toda sequência convergente é de Cauchy.

(33)

Dem.: Seja (a_n) uma sequência convergente, digamos $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Analogamente, se $m, n \geq n_0$ então

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &\leq |a_m - a| + |a - a_n| \\ &= |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

provando que (a_n) é uma sequência de Cauchy. $\square$

Proposição 3: Toda sequência de Cauchy é convergente.

Dem.: Consideremos, inicialmente, duas sequências (l_n) e (L_n) dadas por

$$l_n = \inf \{a_k : k \geq n\} \quad \text{e} \quad L_n = \sup \{a_k : k \geq n\},$$

onde (a_n) é uma sequência de Cauchy fixada. Como (a_n) é uma sequência limitada, os números l_n e L_n existem¹ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, tais sequências são monótonas; mais precisamente, (l_n) é crescente e (L_n) é decrescente, logo são sequências convergentes. Novamente, como (a_n) é de Cauchy, para

1. Aqui, estamos usando o fato de que todo subconjunto de $\mathbb{R}$, não-vazio e limitado, admite ínfimo e supremo.

todo natural k , existe outro $n_k \in \mathbb{N}$ tal que (34)
 $n \geq n_k \Rightarrow |a_n - a_{n_k}| < \frac{1}{k}$,

i.e.,

$$n \geq n_k \Rightarrow a_{n_k} - \frac{1}{k} < a_n < a_{n_k} + \frac{1}{k}.$$

Disso decorre que $a_{n_k} - \frac{1}{k}$ e $a_{n_k} + \frac{1}{k}$ são cotas inferior e superior, resp., para o conjunto $\{a_n : n \geq n_k\}$. Assim,

$$a_{n_k} - \frac{1}{k} \leq l_{n_k} \leq L_{n_k} \leq a_{n_k} + \frac{1}{k}.$$

Disso decorre, junto com o fato que $l_n \leq L_n$, que
 $n \geq n_k \Rightarrow L_n - l_n \leq \frac{2}{k},$

implicando que $\lim_{n \rightarrow \infty} (L_n - l_n) = 0$, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n.$$

Como $l_n \leq a_n \leq L_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, decorre do teorema do confronto que (a_n) é convergente e satisfaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n,$$

e isso finaliza a demonstração. $\square$

Das Proposições 2 e 3 resulta o seguinte

Teorema 1: Uma sequência (a_n) é de Cauchy se, e somente se, é convergente.

Teorema (critério de Cauchy): Uma série numérica (35)
 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é convergente $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal
 que, qualquer que seja o natural $p \geq 1$, tem-se:

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Dem.: Note que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é convergente se,
 e somente a sequência (s_n) , dada por

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k,$$

for convergente. Pelo Teorema 1, a sequência (s_n) é
 convergente $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, qual-
 quer que sejam $n, p \in \mathbb{N}$,

$$n \geq n_0 \Rightarrow |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon,$$

como queríamos. $\square$

De forma equivalente, o critério de Cauchy
 ser enunciado da seguinte forma: a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é
 convergente $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, quaisquer
 que sejam $m, n \in \mathbb{N}$,

$$m > n \geq n_0 \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^m a_k - \sum_{k=0}^n a_k \right| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| < \varepsilon.$$

Teorema 3 (critério de Dirichlet): Considere duas (36)
seqüências (a_n) e (b_n) tais que (a_n) seja decrescente
e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, e exista uma constante $B > 0$ tal que

$$\left| \sum_{k=0}^n b_k \right| \leq B, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nestas condições, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ é convergente.

Exemplo: Considere a série alternada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$, com
 $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, e suponha que (a_n) é decrescente e
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Seja $b_n = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Note que

$$\left| \sum_{k=0}^n b_k \right| \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, usando o critério de Dirichlet, segue que
a série alternada acima é convergente.

Decorre do Exemplo anterior que o critério
de convergência para séries alternadas é simplesmente
um caso particular do critério de Dirichlet.