

Grupos de Lie

Um *grupo de Lie* G é uma variedade diferenciável munida de uma estrutura de grupo de modo que as operações de grupo são diferenciáveis. Mais precisamente, as aplicações

$$(g, h) \in G \times G \mapsto gh \in G \quad \text{e} \quad g \in G \mapsto g^{-1} \in G$$

são diferenciáveis. Disso decorre que a *translação à esquerda* $L_g : G \rightarrow G$ e a *translação à direita* $R_g : G \rightarrow G$, dadas por

$$L_g(h) = gh \quad \text{e} \quad R_g(h) = hg,$$

são difeomorfismos, qualquer que seja o elemento $g \in G$. Neste caso, tem-se $L_g^{-1} = L_{g^{-1}}$ e $R_g^{-1} = R_{g^{-1}}$. Consequentemente, as aplicações

$$dL_g(h) : T_g G \rightarrow T_{gh} G \quad \text{e} \quad dR_g(h) : T_g G \rightarrow T_{hg} G$$

são isomorfismos lineares.

Definição 1. Um campo vetorial X em G é chamado *invariante à esquerda* se X é L_g -invariante, ou seja, se $dL_g X = X$, para todo $g \in G$.

Isso significa que $dL_g(h) \cdot X(h) = X(gh)$, para quaisquer $g, h \in G$, ou seja, $dL_g \circ X = X \circ L_g$, para todo $g \in G$. De forma análoga podemos definir campos *invariante à direita*.

Denotemos por \mathfrak{g} o conjunto dos campos vetoriais invariantes à esquerda em G . Este conjunto, com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar, é um espaço vetorial real. Se $e \in G$ denota o elemento identidade, a aplicação

$$X \in \mathfrak{g} \mapsto X(e) \in T_e G \tag{1.1}$$

define um isomorfismo linear entre \mathfrak{g} e $T_e G$, pois qualquer campo vetorial invariante à esquerda é completamente determinado pelo seu valor no elemento identidade de G :

$$X(g) = X(g \cdot e) = dL_g(e) \cdot X(e), \tag{1.2}$$

qualquer que seja $g \in G$. Disso decorre, em particular, que $\dim \mathfrak{g} = \dim G$.

Proposição 2. Todo campo invariante à esquerda X em um grupo de Lie G é diferenciável.

Demonstração. Considere função diferenciável $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ e uma curva diferenciável $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow G$, com $\gamma(0) = e$ e $\gamma'(0) = X(e)$. Então, o valor de X em f é dado por

$$\begin{aligned} X(g)(f) &= dL_g(e) \cdot X(e)(f) = X(e)(f \circ L_g) \\ &= \frac{d}{dt} f(g \cdot \gamma(t))|_{t=0}, \end{aligned}$$

que é uma função diferenciável. \square

Considere dois campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{g}$. Por definição, X e Y são L_g -relacionais. Disso decorre que o colchete de Lie $[X, Y]$ também é L_g -relacionado. Ou seja, o espaço vetorial \mathfrak{g} é fechado em relação ao colchete de Lie. Assim, dados $X_e, Y_e \in T_e G$, definimos

$$[X_e, Y_e] = [X, Y](e),$$

onde $X, Y \in \mathfrak{g}$ são os campos dados através do isomorfismo (1.1). Com esta operação, o espaço tangente $T_e G$ é chamado a *álgebra de Lie* de G e será denotada por \mathfrak{g} . Assim, os elementos da álgebra de Lie \mathfrak{g} podem ser pensados, indiferentemente, como vetores de $T_e G$ ou campos vetoriais de G que são invariantes à esquerda.

Definição 3. Uma métrica Riemanniana em G é chamada *invariante à esquerda* se

$$\langle v, w \rangle = \langle dL_g(h) \cdot v, dL_g(h) \cdot w \rangle,$$

para quaisquer $g, h \in G$ e $v, w \in T_h G$.

De forma análoga definimos métrica Riemanniana *invariante à direita*. Uma métrica Riemanniana invariante à esquerda e à direita é chamada *bi-invariante*. Se \langle, \rangle_e é um produto interno em $\mathfrak{g} \simeq T_e G$, podemos introduzir uma métrica invariante à esquerda em G pondo

$$\langle v, w \rangle_g = \langle dL_{g^{-1}}(g) \cdot v, dL_{g^{-1}}(g) \cdot w \rangle_e,$$

quaisquer que sejam $g \in G$ e $v, w \in T_g G$. Como L_g depende diferenciavelmente de g , isso fornece, de fato, uma métrica Riemanniana invariante à esquerda em G .

Proposição 4. Seja G um grupo de Lie que admite uma métrica bi-invariante \langle, \rangle . Então, vale a seguinte relação: \blacksquare

$$\langle [X, Y], Z \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle = 0,$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Demonstração. Considere a representação adjunta $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$ de G dada por $\text{Ad}(g) = dL_g(g^{-1}) \circ dR_{g^{-1}}(e)$. Temos que

$$\text{Ad}(g)X = \left. \frac{d}{dt} (g \exp(tX) g^{-1}) \right|_{t=0},$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$ e, como a métrica é bi-invariante, tem-se

$$\langle \text{Ad}(g)X, \text{Ad}(g)Y \rangle = \langle X, Y \rangle,$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{g}$. A diferencial $d\text{Ad}$ define a representação adjunta ad de \mathfrak{g} em \mathfrak{g} :

$$X \in \mathfrak{g} \mapsto \text{ad}_X = \left. \frac{d}{dt} (\text{Ad}(\exp(tX))) \right|_{t=0} \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),$$

que satisfaz $\text{ad}_X Y = [X, Y]$, para todo $Y \in \mathfrak{g}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \langle [X, Y], Z \rangle &= \langle \text{ad}_X Y, Z \rangle = \left\langle \left. \frac{d}{dt} (\text{Ad}(\exp(tX))Y) \right|_{t=0}, Z \right\rangle \\ &= \left. \frac{d}{dt} \langle \text{Ad}(\exp(tX))Y, Z \rangle \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \langle Y, \text{Ad}(\exp(-tX))Z \rangle \right|_{t=0} \\ &= \langle Y, -\text{ad}_X Z \rangle = -\langle Y, [X, Z] \rangle, \end{aligned}$$

como queríamos. □

Corolário 5. Se um grupo de Lie G admite uma métrica bi-invariante, então a conexão de Levi-Civita ∇ de G é dada por

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y],$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Demonstração. Observe, inicialmente, que dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, a função $\langle X, Y \rangle$ é constante em G . Disso decorre, em particular, que $Z\langle X, Y \rangle = 0$, $X\langle Y, Z \rangle = 0$ e $Y\langle X, Z \rangle = 0$, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Portanto, segue da fórmula de Koszul (??) e da Proposição 4 que

$$\langle \nabla_Y X, Z \rangle = -\frac{1}{2}\langle [X, Y], Z \rangle = \frac{1}{2}\langle [Y, X], Z \rangle,$$

como queríamos. □

Corolário 6. Se um grupo de Lie G está munido de uma métrica bi-invariante, então os subgrupos a 1-parâmetro de um campo vetorial $X \in \mathfrak{g}$ são geodésicas em G .

Demonstração. Pelo Corolário 5, segue que $\nabla_X X = 0$, para todo $X \in \mathfrak{g}$. Assim, se $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow G$ é uma curva integral de X , ou seja, $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, então

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = 0,$$

como queríamos. Observe que, da unicidade, as geodésicas de G são subgrupos a 1-parâmetro. \square