

Produto misto

Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ três vetores LI em V^3 , representados por

$$\vec{u} = \vec{OA}$$

$$\vec{v} = \vec{OC}$$

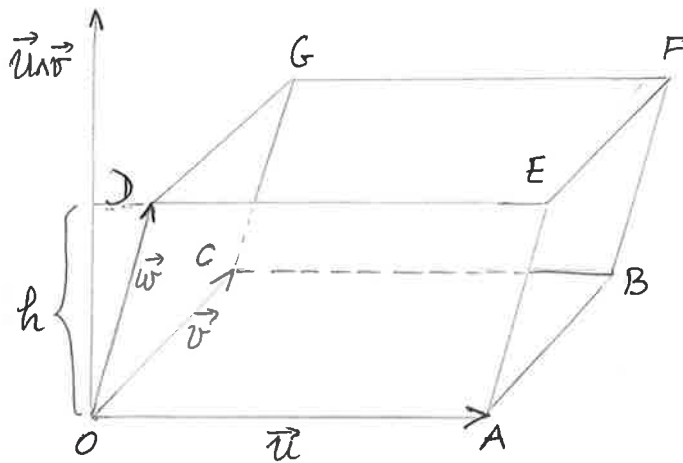
$$\vec{w} = \vec{OD}$$

Considere o

paralelepípedo

determinado pelos

vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$.



Denote por V o volume do paralelepípedo. Temos

$$V = \text{area } OACB \cdot h$$

Sabemos que $\text{area } OACB = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ e $h = \|\text{proj}_{\vec{u} \wedge \vec{v}} \vec{w}\| = \frac{|\vec{w} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v}|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$

$$\text{Portanto, } V = |\vec{w} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}|$$

Definição O produto misto dos vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ nessa ordem,

é o número real $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}$ indicado por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}.$$

Proposição Seja B uma base ortonormal positiva. Sejam $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_B$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_B$, $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)_B$. Então

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Demonstração

$$\text{Para } B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}), \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\text{Logo } \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) \cdot (a_3, b_3, c_3)$$

$$= \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \square$$

Corolário

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LD se, e somente se, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$.

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LI se, e somente se, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$.

Proposição (Propriedades do produto misto)

(a) O produto misto é trilinear: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{u}_i, \vec{v}_i, \vec{w}_i \in V^3, i=1,2$,

$$[\alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = \alpha [\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + \beta [\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}],$$

$$[\vec{u}, \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2, \vec{w}] = \alpha [\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{w}] + \beta [\vec{u}, \vec{v}_2, \vec{w}],$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \alpha \vec{w}_1 + \beta \vec{w}_2] = \alpha [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1] + \beta [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_2].$$

(b) O produto misto é alternado: $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}]$$

$$= [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}].$$

Demonstração Decorre das propriedades do determinante. $\square$

Exemplo Sendo $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 6$, calcule $[2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}, -\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} - 3\vec{w}]$.