SMA0355 - Aula 6 - 07.04.2022
Área da Superfície

Nesta aula vamos aplicar a integral dupla ao problema de determinar a área de uma superfície. No Cálculo 1 e 2 determinamos a área de alguns tipos especiais de superfícies - as superfícies de revolução - por métodos de cálculo envolvendo uma única variável real. Especificamente, a área A da superfície gerada pela rotação do gráfico de uma função f positiva e diferenciável em $[a, b]$ em torno do eixo x é dada pela fórmula

$$A = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Determinaremos aqui a área de uma superfície que é gráfico de uma função de duas variáveis, ou seja, uma superfície cuja equação é dada por $z = f(x, y)$.

Seja S a superfície com equação $z = f(x, y)$, onde f tem derivadas parciais contínuas. Para simplificar a dedução da fórmula, suporemos $f(x, y) \geq 0$ e que o domínio D de f seja um retângulo. Dividamos D em subretângulos R_{ij} com área $\Delta A = \Delta x \Delta y$.

Seja (x_i, y_j) o vértice inferior a esquerda de R_{ij}, seja $P_{ij} = (x_i, y_i, f(x_i, y_j))$ o ponto em S (veja a Figura 1). O plano tangente a S em P_{ij} é uma aproximação a S próximo de P_{ij}. Então, a área ΔT_{ij} da parte deste plano tangente (um paralelogramo) que fica diretamente acima de R_{ij} é uma aproximação da área ΔS_{ij} da parte de S que fica diretamente acima de R_{ij}. Portanto, a soma $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Delta T_{ij}$ é uma aproximação da área de S e essa aproximação parece melhorar conforme o número de retângulos aumenta. Portanto, definimos a área da superfície de S como

$$A(S) = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Delta T_{ij} \tag{1}$$

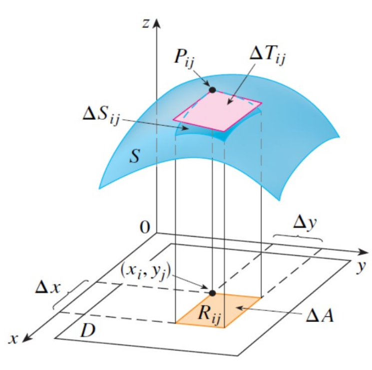

Figura 1:

No que segue vamos computar a área ΔT_{ij} do paralelogramo. Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ os vetores que começam em P_{ij} e ficam ao longo dos lados do paralelogramo com área ΔT_{ij} (Veja a Figura 2.) Então,

$$\Delta T_{ij} = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

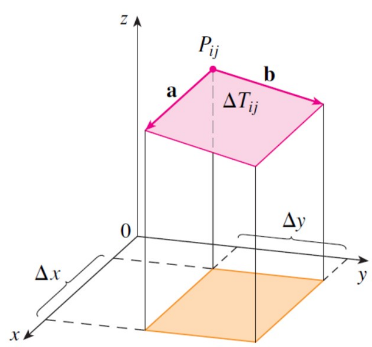

Figura 2:

Lembrando que as derivadas parciais $f_x(x_i, y_j)$ e $f_y(x_i, y_j)$ são as inclinações das retas tangentes em P_{ij} nas direções de $\vec{a}$ e b. Portanto,

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \Delta x\vec{i} + f_x(x_i, y_j)\Delta x\vec{k}\\ \vec{b} &= \Delta y\vec{j} + f_y(x_i, y_j)\Delta y\vec{k}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \Delta x & 0 & f_x(xi, yi)\Delta x \\ 0 & \Delta y & f_y(xi, yi)\Delta y \end{vmatrix}\\ &= -f_x(x_i, y_j)\Delta x\Delta y\vec{i} - f_y(x_i, y_j)\Delta x\Delta y\vec{j} + \Delta x\Delta y\vec{k}\\ &= \left(-f_x(x_i, y_j)\vec{i} - f_y(x_i, y_j)\vec{j} + \vec{k}\right)\Delta A\end{aligned}$$

e

$$\Delta T_{ij} = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{[f_x(xi, yi)^2 + f_y(x_i, y_j)^2 + 1]}\,\Delta A$$

Por (1),

$$\begin{aligned} A(S) &= \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Delta T_{ij} \\ &= \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \sqrt{[f_x(x_i,y_j)^2 + f_y(x_i,y_j)^2 + 1]}\,\Delta A \\ &= \iint_D \sqrt{[f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2 + 1]}\,dA. \end{aligned}$$

Definição. A área da superfície com equação $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, onde f_x e f_y são contínuas, é

$$A(S) \iint_D \sqrt{[f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2 + 1]}\,dA.$$

Exemplo 1. Calcule a área da parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que está abaixo do plano $z = 9$.

Resolução. O plano intercepta o parabolóide na circunferência

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = 9 \end{cases}$$

Portanto, superfície dada é o gráfico de $z = x^2 + y^2$, $(x,y) \in D$, onde D é o disco no plano xy de centro na origem e raio 3. Usando a fórmula, temos

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\,dA \\ &= \iint_D \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1}\,dA = \\ &= \iint_D \sqrt{4(x^2 + y)^2 + 1}\,dA. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança para coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{4(x^2 + y)^2 + 1}\,dA. = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2} r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\theta} d\theta \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2} r\,dr = 2\pi \frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{3/2}\Big|_0^3 \\ &= \frac{\pi}{6}(37\sqrt{37} - 1). \end{aligned}$$

Exemplo 2. Calcule a área da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ situada dentro do cilindro $x^2 + y^2 = ay$, $a > 0$.

Resolução. A porção da esfera compreendida no interior do cilindro será denotada por S e é formada por duas partes de áreas iguais, uma no hemisfério superior e a outra no inferior. Denote por S_1 a porção do hemisfério superior da esfera que está dentro do cilindro. A superfície S_1 é dada por $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $(x, y) \in D$, onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq ay\}$. A função $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ possui derivadas parciais contínuas em $D - \{(0, a)\}$ e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.
\end{aligned}$$

Usando fórmula da área da superfície, temos

$$\begin{aligned}
A(S_1) &= \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA \\
&= \iint_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2} + 1}\, dA \\
&= \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança para coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned}
A(S_1) &= \int_0^{\pi} \int_0^{a \sin\theta} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr d\theta = a \int_0^{\pi} -\sqrt{a^2 - r^2}]\Big|_{r=0}^{r=a\sin\theta} d\theta \\
&= a \int_0^{\pi} (-a|\cos\theta| + a) d\theta = a^2 \int_0^{\pi} (-|\cos\theta| + 1) d\theta \\
&= a^2 \left(\int_0^{\pi/2} (-\cos\theta + 1) d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} (\cos\theta + 1) d\theta \right) \\
&= a^2 \left((-sin\theta + \theta)\Big|_0^{\pi/2} + (\sin\theta + \theta)\Big|_{\pi/2}^{\pi} \right) \\
&= a^2 \left((-1 + \frac{\pi}{2}) + (0 + \pi - 1 - \frac{\pi}{2}) \right) \\
&= a^2(\pi - 2).
\end{aligned}$$

Logo,

$$A(S) = 2a^2(\pi - 2).$$