

Vizinhanças totalmente normais

Nesta seção faremos um refinamento da Proposição ???. Mais precisamente, provaremos que todo ponto $p \in M$ admite uma vizinhança que é vizinhança normal de todos seus pontos.

Lema 1. Dado um ponto $p \in M$, existem uma vizinhança V de p em M e um número $\epsilon > 0$ tais que, para cada $q \in V$, a aplicação \exp_q é um difeomorfismo entre a bola aberta $B_\epsilon(0) \subset T_qM$ e o aberto $V \subset \exp_q(B_\epsilon(0))$. Ou seja, V é uma vizinhança normal de cada um de seus pontos.

Demonstração. Dado $p \in M$, considere o aberto

$$W = \{(q, v) \in TM : q \in U, v \in T_qM, \|v\| < \epsilon\},$$

dado pela Proposição ??, onde o aberto U é domínio de uma carta local (U, φ) em M , com $p \in U$. Defina uma aplicação $\phi : W \rightarrow M \times M$ pondo

$$\phi(q, v) = (q, \exp_q(v)). \quad (1.1)$$

Provemos que ϕ é um difeomorfismo local de uma vizinhança de 0_p em TM sobre uma vizinhança de (p, p) em $M \times M$. Para isso, basta provar que a diferencial

$$d\phi(0_p) : T_{0_p}TM \rightarrow T_pM \oplus T_pM$$

é um isomorfismo linear, logo o resultado seguirá do teorema da aplicação inversa. A matriz da diferencial $d\phi(0_p)$ é dada por

$$d\phi(p, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial q} & \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial q} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v} \end{pmatrix},$$

onde $\phi_1(q, v) = q$ e $\phi_2(q, v) = \exp_q v$. Em relação à carta $(U \times U, \phi \times \phi)$ em $M \times M$, torno do ponto $\phi(p, 0)$, a matriz acima torna-se

$$d\phi(p, 0) = \begin{pmatrix} id & 0 \\ id & id \end{pmatrix},$$

em virtude de (??). Assim, ϕ é um difeomorfismo local sobre uma vizinhança de 0_p . Isso significa que existe uma vizinhança $W' \subset W$ de 0_p em TM que é transformada difeomorficamente sobre uma vizinhança V' de (p, p) em $M \times M$. Podemos escolher W' da forma

$$W' = \{(q, v) \in W : q \in U', v \in T_qM, \|v\| < \delta\},$$

onde $U' \subset U$ é uma vizinhança de p em M . Escolha agora uma vizinhança V de p em M tal que $V \times V \subset V'$. Afirmamos que o aberto V e o número $\delta > 0$ assim obtidos satisfazem o enunciado do Lema. De fato, se $q \in V$ e $B_\delta(0) \subset T_q M$ então, como ϕ é um difeomorfismo em W' , tem-se

$$\{q\} \times V \subset \phi(\{q\} \times B_\delta(0)).$$

Por definição da aplicação ϕ , tem-se $V \subset \exp_q(B_\delta(0))$, como queríamos. \square

O aberto V dado pelo Lema 1 é usualmente chamado de *vizinhança totalmente normal* de p em M . O resultado seguinte é consequência direta do Lema 1.

Corolário 2. Dado um ponto $p \in M$, existem uma vizinhança U de p em M e um número $\epsilon > 0$ com a seguinte propriedade: dados $x, y \in U$, existe um único vetor $v \in T_x M$, com $\|v\| < \epsilon$, tal que $\exp_x(v) = y$.

Demonstração. Seja V uma vizinhança totalmente normal de p . Diminuindo V , se necessário, podemos assumir que

$$V = \bigcup_{x \in Z} B_\epsilon(0_x),$$

para alguma vizinhança Z de p em M e algum $\epsilon > 0$. Seja U uma vizinhança de p em M tal que $U \times U \subset \phi(V)$, onde ϕ é o difeomorfismo dado em (1.1). Então, dados $x, y \in U$, existe um único $v \in V$ tal que $\phi(v) = (x, y)$, ou seja, existe um único $v \in B_\epsilon(0_x)$ tal que $\exp_x(v) = y$. \square

Exemplo 3. A equação das geodésicas (??) em \mathbb{R}^n é dada por

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} = 0, \quad 1 \leq k \leq n,$$

ou seja, geodésicas em \mathbb{R}^n são retas. Assim,

$$\exp_p(v) = p + v,$$

quaisquer que sejam $p \in \mathbb{R}^n$ e $v \in T_p \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$. Disso decorre que no espaço Euclidiano \mathbb{R}^n a aplicação exponencial é a própria aplicação identidade.

Observação 4. Determinemos as geodésicas da esfera \mathbb{S}^n . Dados $p \in \mathbb{S}^n$ e $v \in T_p \mathbb{S}^n$, podemos supor que $v \neq 0$ pois, do contrário, a geodésica γ de \mathbb{S}^n satisfazendo $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$ seria uma curva constante. Como p e v são vetores ortogonais em \mathbb{R}^{n+1} , eles geram um subespaço 2-dimensional E

de \mathbb{R}^{n+1} . Se $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma reflexão em torno de E , então f é uma transformação ortogonal que deixa \mathbb{S}^n invariante. Como f é isometria em \mathbb{R}^{n+1} e \mathbb{S}^n tem a métrica induzida de \mathbb{R}^{n+1} , f restringe-se a uma isometria de \mathbb{S}^n (cf. Exercício ??). Como isometria transforma geodésicas em geodésicas, a curva $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ é uma geodésica de \mathbb{S}^n . Além disso, como f fixa pontualmente o subespaço E , as condições iniciais para $\tilde{\gamma}$ são

$$\tilde{\gamma}(0) = f(\gamma(0)) = f(p) = p \quad \text{e} \quad \tilde{\gamma}'(0) = f(\gamma'(0)) = f(v) = v,$$

que são as mesmas condições iniciais da geodésica γ . Da unicidade das geodésicas, temos que $\tilde{\gamma} = \gamma$, ou seja, $f(\gamma(t)) = \gamma(t)$, para todo $t \in \text{Dom}(\gamma)$. Disso decorre que $\gamma \subset E$ e deve coincidir com o grande círculo $\mathbb{S}^n \cap E$, parametrizado com velocidade constante em seu domínio de definição. Este argumento mostra que os grandes círculos são, localmente, geodésicas, logo são geodésicas em \mathbb{S}^n . Em particular, as geodésicas de \mathbb{S}^n parametrizadas pelo comprimento de arco são periódicas de período 2π , e vale a fórmula

$$\exp_p(v) = \cos(\|v\|)p + \sin(\|v\|)\frac{v}{\|v\|},$$

para todo $v \in T_p\mathbb{S}^n$, com $v \neq 0$.

Exemplo 5. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ uma curva diferenciável, com $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.
Então,

$$\frac{d\gamma}{dt} = x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y}$$

e

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = x'' \frac{\partial}{\partial x} + x' \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + y'' \frac{\partial}{\partial y} + y' \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Usando o Exemplo ??, as derivadas covariantes dos campos coordenados são dadas por

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{\partial}{\partial x} = x' \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} + y' \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{y'}{y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x'}{y} \frac{\partial}{\partial y}$$

e

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{\partial}{\partial y} = x' \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} + y' \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{x'}{y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y'}{y} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Assim,

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = \left(x'' - 2\frac{x'y'}{y} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(y'' + \frac{(x')^2 - (y')^2}{y} \right) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Portanto, as equações das geodésicas em \mathbb{R}_+^2 são dadas por

$$\begin{aligned}x'' - 2\frac{x'y'}{y} &= 0, \\y'' + \frac{(x')^2 - (y')^2}{y} &= 0.\end{aligned}\tag{5.1}$$