

Orientação de V^3

Sejam E e F duas bases de V^3 . Dizemos que E é equivalente a F , e escrevemos $E \sim F$, se $\det(M_{EF}) > 0$.

Seja $\mathcal{B}$ o conjunto de todas as bases de V^3 . A relação " $\sim$ " entre os elementos de $\mathcal{B}$ é uma relação de equivalência, ou seja

(1) $\sim$ é reflexiva: $\forall E \in \mathcal{B}, E \sim E$.

(2) $\sim$ é simétrica: Se $E \sim F$, então $F \sim E$.

(3) $\sim$ é transitiva: se $E \sim F$ e $F \sim G$, então $E \sim G$.

Para provar (1)-(3) usamos o fato que $M_{EE} = Id$, $M_{FE} = (M_{EF})^{-1}$ e $M_{EG} = M_{EF} \cdot M_{FG}$.

A classe de equivalência de uma base E de V^3 , denotada por $\bar{E}$, é o conjunto de todas as bases equivalentes a E , ou seja,

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \{ F \in \mathcal{B} \text{ talque } F \sim E \} \\ &= \{ F \in \mathcal{B} \text{ talque } \det(M_{EF}) > 0 \}.\end{aligned}$$

Vamos mostrar que $\mathcal{B}$ tem somente duas classes de equivalência.

Seja $E = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ uma base de V^3 e F a base de V^3 dada por $F = (\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$.

Como $M_{EF} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(M_{EF}) = -1$, portanto $F \notin \bar{E}$.

Afirmamos que $\mathcal{B} = \bar{E} \cup \bar{F}$. De fato, seja G uma base de V^3 . Se $\det(M_{EG}) > 0$, então $E \sim G$, ou seja $G \in \bar{E}$.

Se não, $\det(M_{EG}) < 0$. Temos $M_{FG} = M_{FE} \cdot M_{EG}$, portanto

$$\det M_{FG} = \underbrace{\det(M_{FE})}_{< 0} \cdot \underbrace{\det(M_{EG})}_{< 0} > 0,$$

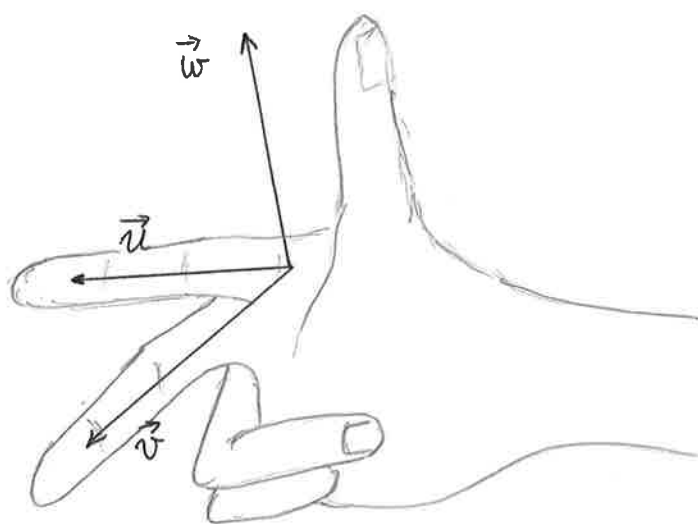
e daí concluímos que $F \sim G$, ou seja $G \in \bar{F}$.

Isso mostra que $\mathcal{B} \subset \bar{E} \cup \bar{F}$. Como $\bar{E} \cup \bar{F} \subset \mathcal{B}$, temos $\mathcal{B} = \bar{E} \cup \bar{F}$.

Observe que $\overline{E} \cap \overline{F} = \emptyset$, pois $F \notin \overline{E}$.

Definição Cada classe de equivalência de $\mathcal{B}$ chama-se orientação de V^3 . Uma vez escolhida e fixada uma classe de equivalência, diz-se que V^3 está orientado, e neste caso cada base da orientação escolhida é chamada base positiva, e cada base da outra orientação é chamada base negativa.

Convenção Uma base $E = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ obedece a regra da mão direita se podemos representar os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ como na seguinte figura



Orientamos V^3 com uma base que obedece a regra da mão direita.

Produto vetorial

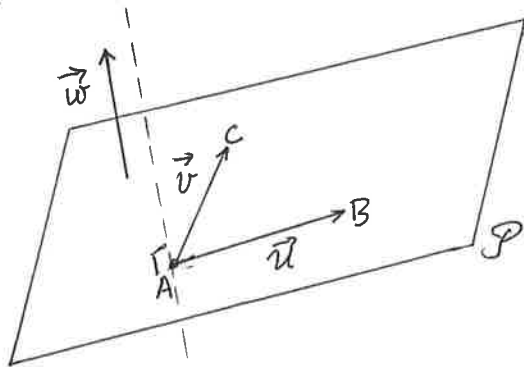
Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores L.I. Existe um vetor não nulo $\vec{w}$ ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.

Se representamos

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

os pts A, B, C



pertencem a um plano único $\mathcal{P}$. A direção do vetor $\vec{w}$ é dada por uma reta perpendicular ao plano $\mathcal{P}$, portanto é única. Mas o sentido de $\vec{w}$ não é único. O módulo de $\vec{w}$ também não é único.

Queremos escolher de uma maneira única um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (quando eles são L.I.).

Definição

O produto vetorial de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o vetor indicado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tal que

(a) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são L.D., então $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

(b) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são L.I. e $\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$, então

(b1) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$;

(b2) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ é uma base positiva;

(b3) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$.

Observações

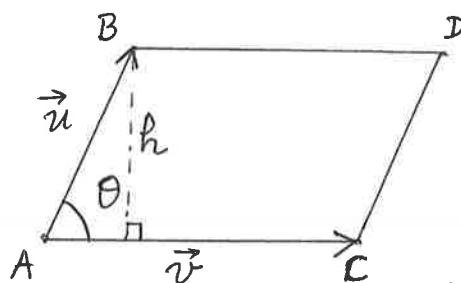
1) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ e $\vec{v}$ são L.D.

2) (b1), (b2), (b3) determinam unicamente o vetor $\vec{u} \wedge \vec{v}$

3) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \text{area do paralelogramo determinado por } \vec{u} \text{ e } \vec{v}$:

$$\vec{u} = \vec{AB}$$

$$\vec{v} = \vec{AC}$$



$$\text{Area ABDC} = h \cdot \|\vec{v}\|$$

$$\text{Temos } \sin \theta = \frac{h}{\|\vec{u}\|}, \text{ portanto}$$

$$h = \|\vec{u}\| \sin \theta \text{ e}$$

$$\text{Area ABDC} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$$

$$= \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|.$$

4) O produto vetorial de dois vetores é um vetor.

O produto escalar de dois vetores é um escalar.

Proposição

Seja $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal positiva.

Se $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_B$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_B$, então $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é

o vetor dado pelo seguinte determinante (formal)

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{vetores da base } B \\ \leftarrow \text{Coordenadas de } \vec{u} \\ \leftarrow \text{Coordenadas de } \vec{v} \end{matrix}$$

Demonstração

Vamos verificar que, de fato, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é dado pelo determinante acima.

(a) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD, então o determinante é o vetor nulo.

$$(b) \text{ Temos } \vec{u} \wedge \vec{v} = (b_1 c_2 - b_2 c_1) \vec{i} - (a_1 c_2 - a_2 c_1) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}$$

$$(b1) \quad \vec{u} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} = a_1(b_1 c_2 - b_2 c_1) - b_1(a_1 c_2 - a_2 c_1) + c_1(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$= 0$$

Similarmente, $\vec{v} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} = 0$. Logo (b1) é satisfeita.

(b2) Seja $E = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$.

$$\det M_{BE} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & |b_1 & c_1| \\ b_1 & b_2 & |a_1 & c_1| \\ c_1 & c_2 & |a_1 & b_1| \\ & & |a_2 & b_2| \end{vmatrix} = |b_1 & c_1|^2 + |a_1 & c_1|^2 + |a_1 & b_1|^2 > 0$$

pois estamos supondo
 $\vec{u}$ e $\vec{v}$ LI.

Portanto E é uma base positiva

(b3) Vamos mostrar que

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sin^2 \theta = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2 \theta).$$

Temos

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \left(1 - \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}{\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2}\right) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \\ &= (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2)^2 \\ &= a_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_1^2 c_2^2 + b_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + b_1^2 c_2^2 + c_1^2 a_2^2 + c_1^2 b_2^2 + c_1^2 c_2^2 \\ &\quad - (a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + c_1^2 c_2^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 + 2a_1 a_2 c_1 c_2 + 2b_1 b_2 c_1 c_2) \\ &= (b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 + (a_1 c_2 - a_2 c_1)^2 + (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2 \\ &= \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2. \end{aligned}$$

□

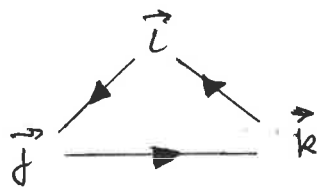
Exemplos Seja $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal positiva.

1. Sejam $\vec{u} = (1, 2, 3)_B$, $\vec{v} = (-1, 1, 2)_B$.

Calcule $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

2. Calcule $(2\vec{k} - \vec{i} + 5\vec{j}) \wedge (3\vec{i} - 2\vec{k} + \vec{j})$.

3. Mostre que $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$,
 $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$, $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$.



Propriedades do produto vetorial

Proposição: Quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e qualquer que seja o número real λ ,

$$(a) \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}.$$

$$(b) \quad \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda (\vec{u} \wedge \vec{v}).$$

$$(c) \quad \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} \quad \text{e} \quad (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}.$$

Demonstração As afirmações decorrem das propriedades do determinante. ■

Proposição

Quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$,

$$(a) \quad (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = -(\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v}.$$

$$(b) \quad \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{w} \cdot \vec{u}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{u}) \vec{w}.$$

Demonstração

(a) A igualdade é satisfeita se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são L.D.

Suponha que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são L.I. Escolhamos uma base ortonormal positiva $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tal que $\vec{i} \parallel \vec{u}$ e $\vec{j}$ é gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Então $\vec{u} = (a_1, 0, 0)_B$, $\vec{v} = (a_2, b_2, 0)_B$, $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)_B$.

$$\text{Temos } \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, a_1 b_2)_B, \text{ portanto,}$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & a_1 b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-a_1 b_2 b_3, a_1 a_3 b_2, 0)_B.$$

Do outro lado,

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} \cdot \vec{w} = a_2 a_3 + b_2 b_3 \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = a_1 a_3 \end{array} \right\} \Rightarrow -(\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} = -(a_2 a_3 + b_2 b_3)(a_1, 0, 0)_B + a_1 a_3 (a_2, b_2, 0)_B \\ = (-a_1 b_2 b_3, a_1 a_3 b_2, 0)_B \\ = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}.$$

Para (b), temos

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = -(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u}$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{usando (a)}}{=} -(-(\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w}) \\ &= (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w}. \quad \square \end{aligned}$$

Corolário (Identidade de Jacobi)

$$\boxed{(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} + (\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} + (\vec{w} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{0}}$$

qualquer que sejam os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Demonstração Aplique a proposição anterior.

Observação Em geral $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) \neq (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$,
então é importante colocar parenteses para calcular o produto
vetorial envolvendo três vetores.

Exemplo Seja B uma base ortonormal positiva,

$$\vec{u} = (1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2})_B, \quad \vec{v} = (6, -2, 4)_B, \quad \vec{w} = (\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7})_B.$$

Calcule $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ e $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

Proposição Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores L.I. Então

(a) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ é uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$,
qualquer que seja o vetor $\vec{w}$.

(b) $F = (\vec{u}, (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ é uma base positiva de V^3 .

Demonstração

(a) Pela proposição na página 42, $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = -(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v}$,
portanto, $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ é uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(b) Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI, $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$ é ortogonal a $\vec{u}$. Logo $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e $\vec{u}$ são LI. Daí $G = (\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u}, (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u})$ é uma base positiva de V^3 . A matriz de mudança da base F para G é dada por

$$M_{FG} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\det(M_{FG}) = 1 > 0$, $F \sim G$, portanto F é positiva. ▮

Corolário

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores LI. Então $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ com

$$\vec{i} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \quad \vec{j} = \frac{(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u}}{\|(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u}\|}, \quad \vec{k} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$$

é uma base ortonormal positiva de V^3 .

Exemplos/exercícios

Seja B uma base ortonormal positiva de V^3 .

1. Calcule a área do paralelogramo $ABCD$ sendo

$$\vec{AB} = (1, 1, -1)_B \text{ e } \vec{AD} = (2, 1, 4)_B.$$

2. Calcule a área do triângulo ABC sendo

$$\vec{AB} = (-1, 1, 0)_B \text{ e } \vec{AC} = (0, 1, 3)_B.$$

3. Sejam $\vec{u} = (1, 1, 1)_B$ e $\vec{v} = (0, 1, 2)_B$. Obtenha uma base ortonormal positiva $E = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ tal que

(i) $\vec{a}$ e $\vec{u}$ sejam da mesma direção e sentido

(ii) $\vec{b}$ seja uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.