Regiões Polares Gerais

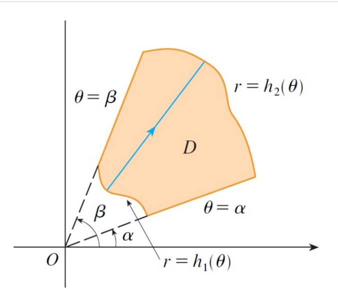

Figura: 23. $D = \{(r, \theta) : \alpha \leq \theta \leq \beta,\ h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$

O que fizemos até aqui pode ser estendido para tipos de região mais gerais, como mostrado na Figura 23. Isso é semelhante a uma região em coordenadas retangulares do Tipo II. Combinando a fórmula (13) com o Teorema de Fubini, obtemos:

Se f for contínua numa região polar da forma

$$D = \{(r, \theta) : \alpha \leq \theta \leq \beta,\ h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\},$$

onde $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, então

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} r f(r \cos\theta, r \sin\theta)\, dr\, d\theta. \quad (13)$$

Em particular, quando $f(x, y) = 1$ para todo $(x, y) \in D$, $h_1(\theta) = 0$ e $h_2(\theta) = h(\theta)$ nessa fórmula, vemos que a área da região D limitada por $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ e $r = h(\theta)$ é

$$\boxed{A(D) = \iint_D 1\, dA = \int_\alpha^\beta \int_0^{h(\theta)} r\, dr\, d\theta = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta h(\theta)^2\, d\theta}$$

que é o mesmo que foi obtido no Cálculo II.

Exemplo 5. Calcule a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas $r = |\cos(2\theta)|$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Solução. A curva descrita pela equação

$$r = cos(2\theta), \quad -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4,$$

é uma pétala da rosácea de quatro pétalas inscrita na circunferência de raio 1 e centro na origem, mostrada na Figura 24 a seguir.

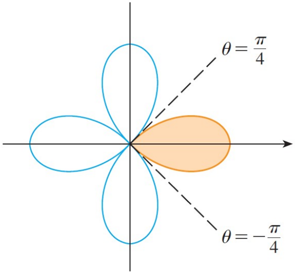

Figura: 24. Uma pétala da rosácea $r = |cos(2\theta)|$

A região D contida em um laço da rosácea corresponde à região

$$D = \{(r, \theta) : -\pi/4 \le \theta \le \pi/4,\ 0 \le r \le \cos(2\theta)\}.$$

Sua área é

$$\begin{aligned} A(D) &= \iint_D 1\, dA = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos(2\theta))^2\, d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \cos(4\theta))\, d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left(\theta + \frac{1}{4} \sin(4\theta) \right) \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} \\ &= \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$