

Geodésicas

As geodésicas constituem a generalização natural do conceito de retas do espaço Euclidiano para uma variedade Riemanniana M^n , representando as curvas que, localmente, minimizam a distância entre dois pontos.

Definição 1. Uma *geodésica* em M é curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow M$ tal que $\frac{D\gamma'}{dt} = 0$.

Em particular, o vetor velocidade $\gamma'(t)$ de uma geodésica é constante, pois

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = \left\langle \frac{D\gamma'}{dt}(t), \gamma'(t) \right\rangle = 0.$$

Disso decorre que o comprimento de arco s de γ , a partir de uma origem fixada, digamos $t = t_0$, é dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(t)\| dt = \text{const}(t - t_0),$$

i.e., o parâmetro de uma geodésica é proporcional ao comprimento de arco.

Dados uma curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow M$ e uma carta local (U, φ) em M , com $\gamma(I) \cap U \neq \emptyset$, seja $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ a expressão local de γ . Então, γ é uma geodésica em M se, e somente se,

$$0 = \frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

que é equivalente a

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (1.1)$$

As equações em (1.1) constituem um sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares de segunda ordem nas funções $x_1, \dots, x_n$, o qual possui solução devido ao seguinte resultado.

Teorema 2 ([?]). *Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem*

$$\gamma'' = F(\gamma, \gamma'),$$

onde $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação diferenciável. Então, dado um ponto $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, existem uma vizinhança $U \times V$ de (x_0, v_0) e um

número $\epsilon > 0$ tais que, para qualquer $(x, v) \in U \times V$, existe uma única solução $\gamma_{x,v} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ com condições iniciais $\gamma_{x,v}(0) = x$ e $\gamma'_{x,v}(0) = v$. Além disso, a aplicação $\phi : U \times V \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por

$$\phi(x, v, t) = \gamma_{x,v}(t),$$

é diferenciável.

Da teoria de equações diferenciais ordinárias, segue que qualquer solução da equação (1.1) é automaticamente diferenciável. O lema seguinte assegura que é possível aumentar a velocidade de uma geodésica diminuindo seu intervalo de definição, ou vice-versa.

Lema 3 (Homogeneidade). Se $\gamma_{x,v} : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução do sistema (1.1) então, para todo $k > 0$, a geodésica $\gamma_{x,kv}(t)$ está definida no intervalo $(-\frac{\delta}{k}, \frac{\delta}{k})$ e vale a relação

$$\gamma_{x,kv}(t) = \gamma_{x,v}(kt).$$

Demonstração. Considere a curva $h : (-\frac{\delta}{k}, \frac{\delta}{k}) \rightarrow M$ dada por

$$h(t) = \gamma_{x,v}(kt).$$

Tem-se $h(0) = x$ e $h'(0) = kv$. Além disso, como

$$h'(t) = k\gamma'_{x,v}(kt),$$

temos

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{dh}{dt} \right) = \nabla_{\frac{dh}{dt}} \frac{dh}{dt} = k^2 \nabla_{\gamma'_{x,v}(kt)} \gamma'_{x,v}(kt) = 0.$$

Assim, h é uma geodésica que no instante $t = 0$ passa pelo ponto x com velocidade kv . Pela unicidade, temos

$$h(t) = \gamma_{x,v}(kt) = \gamma_{x,kv}(t),$$

como queríamos. □

A proposição seguinte permite tornar o intervalo de definição de uma geodésica uniformemente grande em uma vizinhança de um ponto fixado.

Proposição 4. Dado um ponto $p \in M$, existem uma vizinhança U de p em M , um número $\epsilon > 0$ e uma aplicação diferenciável $\phi : W \times (-2, 2) \rightarrow M$, onde

$$W = \{(q, v) \in TM : q \in U, v \in T_q M, \|v\| < \epsilon\},$$

tais que $\gamma_{q,v}(t) = \phi(q, v, t)$ é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa pelo ponto q com velocidade v .

Demonstração. Dado uma carta local (U, φ) em M , com $\varphi \sim (x_1, \dots, x_n)$, a aplicação $\bar{\varphi} : \pi^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ dada por

$$\bar{\varphi}(p, v) = (\varphi(p), d\varphi(p) \cdot v),$$

é uma carta local no fibrado tangente TM , onde $\pi : TM \rightarrow M$ denota a projeção canônica, $\pi(p, v) = p$. Assim, a equação das geodésicas em M correspondem, via $\bar{\varphi}$, à equações diferenciais de segunda ordem para curvas em $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$, para o qual podemos aplicar o Teorema 2. De forma mais precisa, qualquer curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow M$ determina uma curva diferenciável $\bar{\gamma} : I \rightarrow TM$ por

$$\bar{\gamma}(t) = \left(\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t) \right).$$

Se γ é geodésica então, na restrição $TM|_U$, a curva

$$t \in I \mapsto \left(x_1(t), \dots, x_n(t), \frac{dx_1}{dt}(t), \dots, \frac{dx_n}{dt}(t) \right)$$

satisfaz o sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= y_k \\ \frac{dy_k}{dt} &= - \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k y_i y_j \end{aligned} \tag{4.1}$$

com $1 \leq k \leq n$, em termos das coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ em $TM|_U$. Assim, o sistema de segunda ordem (1.1) em U é equivalente ao sistema de primeira ordem (4.1) em TU . Deduzimos então que existe uma vizinhança W de 0_p em TM de modo que, para todo $v \in W$, existe uma única geodésica $\gamma_v : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ tal que $\gamma_v(0) = \pi(v)$ e $\gamma'_v(0) = v$, e $\gamma_v(t)$ é diferenciável em $(v, t) \in W \times (-\delta, \delta)$. Em virtude do Exercício ??, podemos diminuir W e assumir que é da forma

$$W = \{v \in TU : \|v\| < \epsilon'\},$$

para alguma vizinhança U de p em M e algum $\epsilon' > 0$. O Lema 3 permite que, multiplicando o comprimento de v por $\delta/2$ faz o intervalo de definição de γ_v ser multiplicado por $2/\delta$. Portanto, tomando $\epsilon \leq \frac{\epsilon'\delta}{2}$, a geodésica $\gamma_{q,v}(t)$ está definida para $|t| < 2$ e $\|v\| < \epsilon$. $\square$

Dado $p \in M$, seja $W \subset TM$ um aberto dado pela Proposição 4. Definimos uma aplicação $\exp : W \rightarrow M$ pondo

$$\exp(q, v) = \gamma_{q,v}(1) = \gamma_{q, \frac{v}{\|v\|}}(\|v\|),$$

chamada a *aplicação exponencial* em W .

Observação 5. Em geral, utilizaremos a restrição da aplicação $\exp$ a um aberto de $T_p M$, ou seja, consideraremos a aplicação

$$\exp_p : B_\epsilon(0) \subset T_p M \rightarrow M$$

definida por

$$\exp_p(v) = \exp(p, v).$$

Note que $\exp_p(0) = p$. Geometricamente, $\exp_q(v)$ é o ponto de M obtido percorrendo-se um comprimento igual a $\|v\|$, a partir de q , sobre a geodésica que passa por q com velocidade $v/\|v\|$.

Proposição 6. Dado um ponto $p \in M$, valem as seguintes propriedades:

- (a) A aplicação exponencial $\exp_p$ transforma uma vizinhança V de 0_p em $T_p M$ difeomorficamente sobre uma vizinhança U_p de p em M .
- (b) Existe um número $\epsilon > 0$ tal que, para cada $q \in U_p$, existe um único vetor $v \in T_q M$, com $\|v\| < \epsilon$, de modo que $\exp_p(v) = q$.

Demonstração. Calculemos a diferencial $d\exp_p(0_p) : T_p M \rightarrow T_p M$ da aplicação $\exp_p$, onde estamos identificando $T_{0_p}(T_p M) \simeq T_p M$. Lembrando que $\exp_p(tv) = \gamma_{p,tv}(1) = \gamma_{p,v}(t)$, temos

$$\begin{aligned} d\exp_p(0_p) \cdot v &= \frac{d}{dt} (\exp_p(tv)) \big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (\gamma_{p,tv}(1)) \big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (\gamma_{p,v}(t)) \big|_{t=0} = \gamma'_{p,v}(0) = v. \end{aligned}$$

Assim, $d\exp_p(0_p)$ é a aplicação identidade em $T_p M$, e o resultado segue do teorema da aplicação inversa. $\square$

A vizinhança U_p de p dada pela Proposição 6 é usualmente chamada de *vizinhança normal* de p . Assim, qualquer ponto em uma vizinhança normal de p pode ser ligado a p por uma única geodésica naquela vizinhança.

Observação 7. Decorre da Proposição 6 que a aplicação exponencial $\exp_p$ é uma carta local natural para a variedade Riemanniana M , em torno de p . Ou seja, $\exp_p$ é uma carta local para M determinada pela geometria de M , com a propriedade de que as retas radiais, saindo de $0_p \in T_p M$, são transformadas em geodésicas de M , partindo de p .