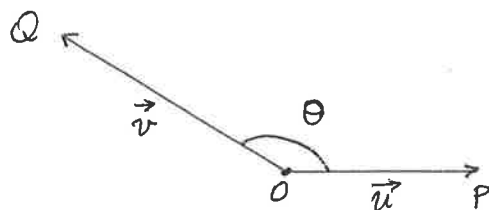


Produto escalar

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos representados pelos pares de pontos O, P e O, Q respectivamente; isto é,

$\vec{u} = \vec{OP}$ e $\vec{v} = \vec{OQ}$, com O a mesma origem das duas representações.

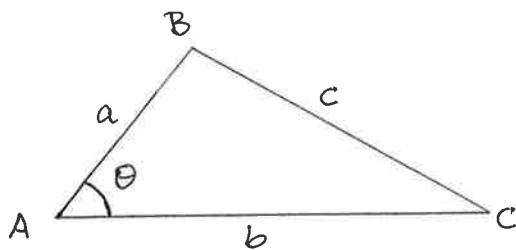


Definição: A medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é a medida θ do ângulo $\widehat{POQ}$ com $0 \leq \theta \leq \pi$. Escrevemos

$$\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v}).$$

Observação Temos duas escolhas para definir $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$: escolhamos $\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$ de modo que $0 \leq \theta \leq \pi$.

Lei do Cosseno

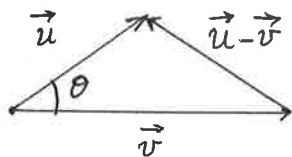
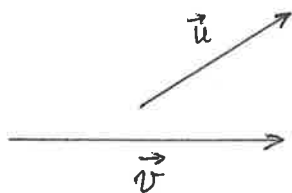


Seja ABC um triângulo como na figura acima, a o comprimento do segmento AB , b o comprimento do segmento AC , c o comprimento do segmento BC e θ o ângulo formado pelos segmentos AB e AC .

Temos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \quad (\text{Lei do cosseno})$$

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores e $\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$



Pela Lei do cosseno, temos

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta, \quad \theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$$

A Lei do cosseno permite calcular $\cos\theta$ sabendo $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ e $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.

Definição

O produto escalar dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, indicado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, é o número real tal que

(a) se $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ é nulo, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

(b) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são nulos e $\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta.$$

Observações/propriedades

1. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são nulos,

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}.$$

2. $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

Portanto, por (1) e (2), se temos um produto escalar bem definido podemos obter o ângulo θ e o módulo de vetores.

3. $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$ ($\vec{u} \perp \vec{v}$) se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

4. Desigualdade de Schwarz: para $\vec{u}, \vec{v}$ vetores quaisquer, vale $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ (Exercício)

Base ortonormal

Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3 . Dizemos que E é uma base ortonormal se

(1) $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1$ (i.e., os vetores $\vec{e}_i, i=1,2,3$, são unitários).

(2) $\text{ang}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \text{ang}(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = \text{ang}(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = \frac{\pi}{2}$ (i.e., os vetores são dois a dois ortogonais).

Proposição

Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal de V^3 , $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_E$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_E$. Então

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

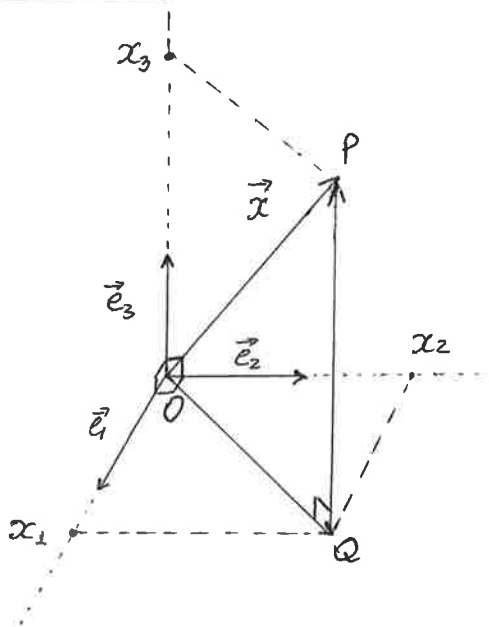
Demonstração

Seja $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)_E$.

Representamos $\vec{x}$ como na figura pelo vetor $\vec{OP}$.

Pelo Teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned}\|\vec{x}\|^2 &= \|\vec{OP}\|^2 \\ &= \|\vec{OQ}\|^2 + \|\vec{QP}\|^2 \\ &= \|\vec{OQ}\|^2 + \|\vec{x}_3 \vec{e}_3\|^2 \\ &= \|\vec{x}_1 \vec{e}_1\|^2 + \|\vec{x}_2 \vec{e}_2\|^2 + \|\vec{x}_3 \vec{e}_3\|^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.\end{aligned}$$



Portanto $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Temos, por definição, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$.

Pela Lei do cosseno,

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta.$$

Temos

$$\begin{aligned}\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2 \\ &= a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - 2(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2).\end{aligned}$$

$$\text{Portanto } a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta = \vec{u} \cdot \vec{v}. \quad \square$$

Observações

1. A fórmula na proposição anterior é válida somente quando a base E é uma base ortonormal.
2. A fórmula é válida em qualquer base ortonormal.

Exemplos/Exercícios

1. Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal de V^3 .

$$\text{e sejam } \vec{f}_1 = \vec{e}_1, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_3.$$

- (a) Mostre que $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é uma base de V^3 .
 F é ortonormal?

- (b) Seja $\vec{u} = (1, 0, 0)_F$ e $\vec{v} = (0, 1, 0)_F$. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

2. Seja E uma base ortonormal de V^3 . Calcule $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$

$$\text{Sendo (i) } \vec{u} = (1, 0, 1)_E, \quad \vec{v} = (-2, 1, 2)_E.$$

$$(ii) \quad \vec{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)_E, \quad \vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)_E.$$

3. Obtenha os vetores de norma $3\sqrt{3}$ que são ortogonais a

$$\vec{u} = (2, 3, -1)_E \quad \text{e a} \quad \vec{v} = (2, -4, 6)_E, \quad \text{Sendo } E \text{ uma base ortonormal de } V^3.$$

Proposição (Propriedades do produto escalar)

Qualquer que sejam os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ e qualquer que seja o número real λ , valem as seguintes propriedades:

- (a) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- (b) $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$
- (c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- (d) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$.

Demonstração Usamos coordenadas dos vetores em relação a uma base ortonormal. (Vamos mostrar que tais bases existem.) $\square$

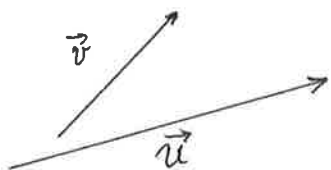
Exercício

Seja $\vec{w}$ um vetor não nulo e T o conjunto dos vetores em V^3 que são ortogonais a $\vec{w}$. Prove que

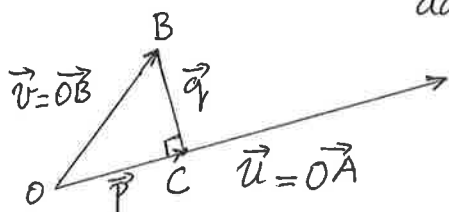
- (a) $\vec{w}$ não pertence a T .
- (b) Qualquer combinação linear de vetores em T pertence a T .
- (c) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores LI de T , então $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI.
- (d) Três vetores quaisquer de T são LD.
- (e) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores LI de T , então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ geram T , isto é, todo vetor de T é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
 T é chamado plano ortogonal a $\vec{w}$.

Projeção ortogonal

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos. Vamos decompor o vetor $\vec{v}$ em soma de dois vetores $\vec{p}$ e $\vec{q}$, com $\vec{p}$ paralelo ao vetor $\vec{u}$ e $\vec{q}$ ortogonal a $\vec{u}$.



Tal decomposição existe: Seja C o pé da perpendicular por B a reta OA



Então $\vec{p} = \vec{OC}$ e $\vec{q} = \vec{CB}$ satisfazem $\vec{p} + \vec{q} = \vec{v}$, $\vec{p} \parallel \vec{u}$ e $\vec{q} \perp \vec{u}$.

O vetor $\vec{p}$ é chamado projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ e é denotado por $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$.

Vamos achar as expressões de $\vec{p}$ e $\vec{q}$ em termos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Existe um escalar α tal que $\vec{p} = \alpha \vec{u}$.

$$\text{Temos } \vec{v} = \vec{p} + \vec{q} = \alpha \vec{u} + \vec{q} = 0$$

$$\text{Logo } \vec{u} \cdot \vec{v} = \alpha \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{q} = \alpha \|\vec{u}\|^2.$$

$$\text{Daí } \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2},$$

$$\boxed{\vec{p} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}}$$

$$\boxed{\vec{q} = \vec{v} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}}$$

Proposição: Seja $\vec{u}$ um vetor não nulo. A projeção ortogonal de um vetor $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ é dada por

$$\vec{p} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} \text{ e seu módulo é } \|\vec{p}\| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\|}.$$

Exemplo Seja E uma base ortonormal.

(1) Calcule a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ sendo

$$\vec{v} = (1, -1, 2)_E, \quad \vec{u} = (3, -1, 1)_E.$$

(2) Decomponha $\vec{v} = (-1, -3, 2)_E$ em soma de dois vetores $\vec{p}$ e $\vec{q}$ de modo que $\vec{p}$ seja paralelo a $\vec{u} = (0, 1, 3)_E$ e $\vec{q}$ seja ortogonal a $\vec{u}$.

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Vimos que é fácil calcular o produto escalar de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (e portanto de $\|\vec{u}\|$, $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$, $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$) quando as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são em relação a uma base ortonormal.

Suponha que $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é uma base mas não é ortonormal.

Como construir uma outra base ortonormal $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

a partir de E ?

Observe que uma vez que temos B , podemos fazer uma mudança de base de E para B e trabalhar na base B .

Construção de B

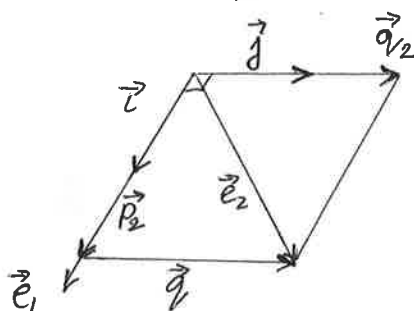
(1) Escolhamos $\vec{i}$ como o versor de $\vec{e}_1$:

$$\vec{i} = \frac{\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|}.$$

(2) Decomponamos $\vec{e}_2$ em dois vetores $\vec{p}_2$ e $\vec{q}_2$, sendo $\vec{p}_2 \parallel \vec{i}$ e $\vec{q}_2 \perp \vec{i}$.

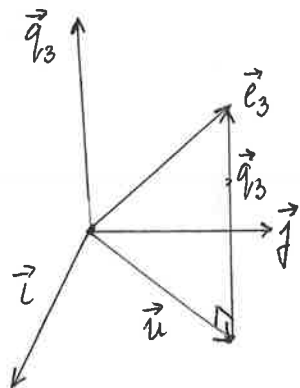
Sabemos que $\vec{p}_2 = \frac{\vec{i} \cdot \vec{e}_2}{\|\vec{i}\|^2} \vec{i} = (\vec{i} \cdot \vec{e}_2) \vec{i}$ pois $\|\vec{i}\| = 1$, e

$$\vec{q}_2 = \vec{e}_2 - (\vec{i} \cdot \vec{e}_2) \vec{i}.$$



Observe que $\vec{q}_2 \neq \vec{0}$ pois $\vec{e}_2$ e $\vec{i}$ são L.I.

Escolhamos $\vec{j} = \frac{\vec{q}_2}{\|\vec{q}_2\|}$



Seja $\vec{u}$ a projeção ortogonal de $\vec{e}_3$ ao plano gerado por $\vec{i}$ e $\vec{j}$ (também gerado por $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$).

Temos

$\vec{e}_3 = \vec{q}_3 + \vec{u}$ sendo $\vec{q}_3$ ortogonal a $\vec{i}$ e $\vec{j}$ e $\vec{u}$ gerado por $\vec{i}$ e $\vec{j}$.

Temos $\vec{u} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$. Como $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$,

$$\vec{e}_3 = \vec{q}_3 + \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \vec{e}_3 \cdot \vec{i} \\ \beta = \vec{e}_3 \cdot \vec{j} \end{cases}$$

$$\text{Portanto, } \vec{q}_3 = \vec{e}_3 - (\vec{e}_3 \cdot \vec{i})\vec{i} - (\vec{e}_3 \cdot \vec{j})\vec{j}$$

Observe que $\vec{q}_3 \neq \vec{0}$ pois $\vec{e}_3, \vec{i}, \vec{j}$ são L.I.

$$\text{Escolhamos } \vec{k} = \frac{\vec{q}_3}{\|\vec{q}_3\|}.$$

A base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é ortonormal.

Observe que a matriz de mudança da base E para B tem a forma

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \text{ isto é, é uma matriz triangular superior.}$$

Exemplos/Exercícios

1. Sejam, em relação a uma base ortonormal, $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$, $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$, $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1)$ e $\vec{a} = (3, -2, -1)$.

Prove que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base ortonormal e calcule as coordenadas de $\vec{a}$ nessa base.

Solução

Temos $\vec{u} \cdot \vec{u} = \frac{1}{3}(1+1+1) = 1$, $\vec{v} \cdot \vec{v} = 1$, $\vec{w} \cdot \vec{w} = 1$,
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$. Logo $F(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base ortonormal.

Para achar as coordenadas de $\vec{a}$ na base F , podemos usar a fórmula de mudança de base. Podemos também prosseguir da seguinte forma:

Temos $\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$. Como $F(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é ortonormal
 $\vec{a} \cdot \vec{u} = x$, $\vec{a} \cdot \vec{v} = y$, $\vec{a} \cdot \vec{w} = z$.

$$\text{Portanto, } x = (3, -2, -1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1) = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$y = (3, -2, -1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1) = -\frac{3}{\sqrt{2}},$$

$$z = (3, -2, -1) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1) = \frac{7}{\sqrt{6}}.$$

$$\text{Daí, } \vec{a} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{6}} \right)_F$$

2. Descreva o conjunto solução da equação $\vec{x} \cdot (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = 0$, sabendo que $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é uma base ortonormal.

Solução Escrevemos $\vec{x} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. Então
 $\vec{x} \cdot (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = 0 \Leftrightarrow (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) \cdot (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = 0$

$$\Leftrightarrow (a, b, c) \cdot (1, 1, -1) = 0$$

$$\Leftrightarrow a + b - c = 0 \Leftrightarrow c = a + b.$$

(base ortonormal)

Logo, $\vec{x} = a\vec{i} + b\vec{j} + (a+b)\vec{k} = a(\vec{i} + \vec{k}) + b(\vec{j} + \vec{k})$, ou seja $\vec{x}$ é gerado por $\vec{i} + \vec{k}$ e $\vec{j} + \vec{k}$ e pertence ao plano ortogonal a $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.