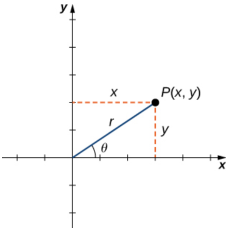
# Coordenadas Polares

Seja $P$ um ponto do plano $xy$, cujas coordenadas cartesianas são $(x, y)$. Este ponto tem coordenadas *coordenadas polares* $(r, \theta)$, definidas pelas relações:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

A coordenada $r$ é a distância de $P = (x, y)$ à origem $O$ do plano e $\theta$ é o ângulo entre o semieixo positivo $Ox$ e o segmento orientado $OP$, medido a partir do semieixo $Ox$, tomando como positivo o sentido anti-horário. Assim, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e

$$\theta = \arctan(y/x), \text{ se } x \neq 0, \text{ e } \theta \in \{\tfrac{\pi}{2} \pm k\pi : k \in \mathbb{N}\}, \text{ se } x = 0.$$



**Exemplo 1.** Encontre as coordenadas polares do ponto cujas coordenadas cartesianas são $(1, \sqrt{3})$.

*Solução.* Temos $x = 1$, $y = \sqrt{3}$, de modo que $r = \sqrt{1+3} = 2$. Também,

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}, \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto $\theta = \pi/3$, e as coordenadas polares são $(2, \pi/3)$.

**Exemplo 2.** A equação de uma circunferência de raio 3 e centro na origem é simplesmente $r = 3$. Isto expressa que a distância do ponto $(x, y)$ a origem é a constante 3. Seja $D$ o disco de raio 3 centrado na origem. Assim, $D$ é a região limitada pela circunferência. Então $D$ é o conjunto dos pontos $(x, y)$ tais que as coordenadas polares satisfazem $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le r \le 3$. Assim $D$ corresponde a um retângulo $D^*$ no plano $r\theta$ dos $(r, \theta)$ que satisfazem $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le r \le 3$ por meio da transformação

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta.$$

# Integrais Duplas em Coordenadas Polares

Às vezes, as integrais duplas são muito mais fáceis de avaliar se alterarmos as coordenadas retangulares para coordenadas polares. No entanto, antes de descrevermos como fazer essa mudança, precisamos estabelecer o conceito de integral dupla em uma região retangular polar.

Quando definimos a integral dupla para uma função contínua em coordenadas retangulares em uma região retangular plana $R$, dividimos $R$ em subretângulos com lados paralelos aos eixos coordenados. Esses lados têm valores $x$ constantes ou valores $y$ constantes.

Em coordenadas polares, a forma com que trabalhamos é um *retângulo polar*, cujos lados têm valores $r$ constantes ou valores $\theta$ constantes. Isso significa que podemos descrever um retângulo polar como na Figura 21, com

$$R = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : a \leq r \leq b, \ \alpha \leq \theta \leq \beta\}.$$

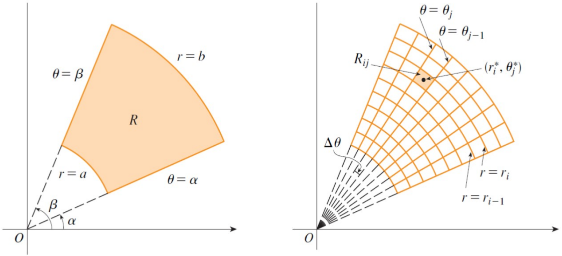



Figura: 21. À esquerda: um retângulo polar $R$. À direita: $R$ dividido em subretâgulos polares $R_{ij}$.

Para calcular a integral dupla $\iint_R f(x,y)dA$, onde $R$ é um retângulo polar, dividimos o intervalo $[a,b]$ em $m$ subintervalos $[r_{i-1}, r_i]$ de comprimentos iguais a $\Delta r = (b-a)/m$ e dividimos o intervalo $[\alpha, \beta]$ em $n$ subintervalos $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ de comprimentos iguais a $\Delta\theta = (\beta - \alpha)/n$. Então os círculos $r = r_i$ e os raios $\theta = \theta_j$ dividem o retângulo polar $R$ em $mn$ subretângulos polares

$$R_{ij} = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : r_{i-1} \le r \le r_i,\ \theta_{j-1} \le \theta \le \theta_j\}.$$

mostrados na Figura 21. O centro dos subretângulos polares $R_{ij}$ tem coordenadas polares $(r_i^*, \theta_j^*)$, onde

$$r_i^* = \frac{r_{i-1} + r_i}{2}, \quad \theta_j^* = \frac{\theta_{j-1} + \theta_j}{2}$$

Lembrando que a área de um setor circular de raio $r$ e ângulo central $\theta$ é $\frac{1}{2}r^2\theta$, a área de $R_{ij}$ é

$$\begin{aligned}\Delta A &= \frac{1}{2}r_i^2\Delta\theta - \frac{1}{2}r_{i-1}^2\Delta\theta = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\Delta\theta \\ &= \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\Delta\theta = r_i^*\Delta r\Delta\theta.\end{aligned}$$

Usando que as coordenadas retangulares do centro do subretângulo polares $R_{ij}$ é $(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\sin\theta_j^*)$, uma soma de Riemann de $f(x,y)$ em $R$ é

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\sin\theta_j^*)\Delta A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\sin\theta_j^*)r_i^*\Delta r\Delta\theta. \tag{8}$$

Assim,

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\sin\theta_j^*)r_i^*\Delta r\Delta\theta. \tag{9}$$

Por outro lado, se definirmos a função $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)r$ então a soma de Riemann na equação (8) pode ser escrita como

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_j^*)\Delta r \Delta\theta, \tag{10}$$

que é a soma de Riemann de $g(r,\theta)$ em $[a,b]\times[\alpha,\beta]$, ou seja,

$$\begin{aligned} \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_j^*)\Delta r \Delta\theta &= \int_{\alpha}^{\beta}\left[\int_a^b g(r,\theta)\,dr\right]d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta}\left[\int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr\right]d\theta \end{aligned} \tag{11}$$

Combinando (9) com (10) e (11), obtemos

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_{\alpha}^{\beta}\left[\int_a^b rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr\right]d\theta.$$

# Resumindo:

**Mudança para Coordenadas Polares numa Integral Dupla**
Se $f$ for contínua em um retângulo polar $R$ dado por

$$R = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : a \leq r \leq b,\ \alpha \leq \theta \leq \beta\},$$

onde $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, então

$$\iint_R f(x, y)dA = \int_\alpha^\beta \left[\int_a^b rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\, dr\right] d\theta. \qquad (12)$$

**Exemplo 3.** Calcule $\iint_D (x^2 + y^2)\, dA$, onde $D$ é a região no semiplano superior limitado pelas circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

*Solução.* A região $D$ pode ser descrita em coordenadas retangulares como

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Em coordenadas polares, $D$ pode ser escrito como

$$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Portanto, pela fórmula (13), temos

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2 + y^2)\, dA &= \int_0^\pi \int_1^2 [(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2] r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_1^2 [r^2] r\, dr\, d\theta = \int_0^\pi \int_1^2 r^3\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^\pi d\theta \int_1^2 r^3\, dr = \pi \frac{r^4}{4}\Big|_1^2 \\
&= \frac{15\pi}{4}
\end{aligned}$$

**Exemplo 4.** Calcule o volume do sólido que está sob o parabolóide $z = x^2 + y^2$, acima do plano $xy$, e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

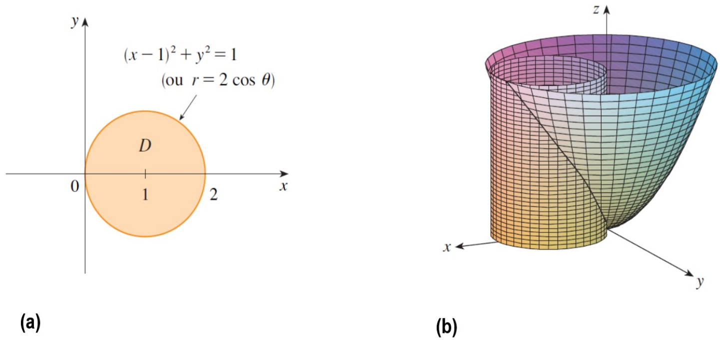



Figura: 22. (a) Disco $D$ (base do sólido). (b) Sólido.

*Solução.* O sólido está acima do disco $D$ (Figuras 22 (a) e (b)) cuja fronteira é a circunferência de equação

$$x^2 + y^2 = 2x, \text{ ou seja } (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Em coordenadas polares a equação $x^2 + y^2 = 2x$ se escreve como $r = 2\cos\theta$. Portanto, o disco $D$ é dado em coordenadas polares por

$$D = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 2\cos\theta\}.$$

Portanto, pela fórmula (13), temos

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\, dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r^2 r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^4}{4}\Big|_0^{2\cos\theta} d\theta$$
$$= 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta d\theta = 8\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta d\theta = 8\int_0^{\pi/2} \left(\cos^2\theta\right)^2 d\theta$$
$$= 8\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \left(1 + 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)\right) d\theta$$
$$= 2\int_0^{\pi/2} \left(1 + 2\cos(2\theta) + \frac{1+\cos(4\theta)}{2}\right) d\theta$$
$$= 2\left(\frac{3}{2}\theta + \sin(2\theta) + \frac{1}{8}\sin(4\theta)\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{2}.$$