

4. Critérios de convergência para séries numéricas (17.)

Agora vejamos critérios de convergência que se aplicam a alguns casos de séries numéricas.

Definição: Uma série alternada é uma série do tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

onde $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

É relativamente simples encontrar exemplos de séries alternadas.

Exemplos: As séries abaixo são alternadas.

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$$

$$(iii) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} - \frac{\ln 4}{4} + \dots$$

O resultado seguinte nos dá um critério de convergência para séries alternadas.

Teorema 1: Se uma série alternada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ é tal que a sequência (a_n) é decrescente e satisfaz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, então ela é convergente.

Exemplo. A série $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$ é alternada. Como $\ln x$ é uma função crescente, a sequência $a_n = \frac{1}{\ln n}$, $n \geq 2$, é decrescente. Além disso, como $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty$, tem-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0$, e a série converge pelo Teorema 1. (18)

Exemplo: A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ é alternada e satisfaz as condições do Teorema 1, logo é convergente.

Teorema (critério da integral): Considere a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e suponha que exista uma função contínua, decrescente e positiva $f: [n_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(n) = a_n$, $\forall n \geq n_0$, com $n_0 \in \mathbb{N}$. Então:

(i) Se $\int_{n_0}^{+\infty} f(x) dx$ converge, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

(ii) Se $\int_{n_0}^{+\infty} f(x) dx$ diverge, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

Obs.: A prova é simples; a ideia consiste em comparar com a área da região delimitada pelo gráfico de f .

Exemplo: Analisemos a convergência da série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Considere a função contínua $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, com $x \geq 2$. Claramente f é positiva p/ $x \geq 2$, pois $\ln x > 0$, para $x \geq 2$. Além disso, como x e $\ln x$ são crescentes, o produto é crescente, logo $\frac{1}{x \ln x}$ é decrescente em $x \geq 2$. Além disso, temos:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{K \rightarrow \infty} \int_2^K \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{K \rightarrow \infty} \ln(\ln x) \Big|_2^K$$

$$= \lim_{K \rightarrow \infty} (\ln(\ln K) - \ln(\ln 2)) = +\infty.$$

Assim, pelo critério da integral, a série é divergente.

Exemplo: Estudemos agora a convergência da série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^{\alpha}}, \text{ onde } \alpha > 0, \alpha \neq 1. \text{ Como no caso anterior, considere a função } f(x) = \frac{1}{x (\ln x)^{\alpha}}, \text{ com } x \geq 2.$$

f é uma função contínua, positiva e decrescente no intervalo $[2, +\infty)$. Para resolver a integral, façamos a mudança de variável

$$u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx.$$

Anim,

(20.)

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^\alpha} dx = \int \frac{1}{u^\alpha} du = \frac{1}{1-\alpha} u^{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{(\ln x)^{\alpha-1}}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^\alpha} dx &= \lim_{K \rightarrow \infty} \int_2^K \frac{1}{x(\ln x)^\alpha} dx = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{(\ln x)^{\alpha-1}} \Big|_2^K \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \cdot \lim_{K \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(\ln K)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\ln 2)^{\alpha-1}} \right] \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{(1-\alpha)(\ln 2)^{\alpha-1}}, & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty, & \text{se } 0 < \alpha < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Decorre então do critério da integral que a série converge se $\alpha > 1$, e diverge se $0 < \alpha < 1$.

Teorema 3 (critério de comparação): Considere duas séries numéricas $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, e suponha que exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq a_n \leq b_n, \quad \forall n > n_0.$$

(i) Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

(ii) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, então $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge.

Exemplo: Estude a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Lembre que a função $\sin x$ satisfaz a propriedade $\sin x < x$, $\forall x \in (0, \pi/2)$. Aním,

$$0 \leq \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \geq 1.$$

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente (série harmônica de ordem 2), decorre do critério de comparação que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ também é convergente.

Exemplo: Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$. Temos

$$0 < \frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge (série geométrica de razão $\frac{1}{2}$), decorre do critério de comparação que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ converge.

Exemplo: Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+n+1}$. Note que

$$\frac{n^2}{n^3+n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}, \quad \text{com } 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \leq 3, \quad \forall n \geq 1.$$

Aním,

$$\frac{n^2}{n^3+n+1} \geq \frac{1}{3n}, \quad n \geq 1.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ diverge, segue do critério de comparação que a série diverge.