

Transporte paralelo

Seja M^n uma variedade Riemanniana. Um *campo vetorial ao longo* de uma curva $\gamma : I \rightarrow M$, definida num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, é simplesmente uma aplicação diferenciável $X : I \rightarrow TM$ tal que $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$, para todo $t \in I$. Se γ é uma curva diferenciável, um exemplo simples de campo vetorial ao longo de γ é seu campo vetorial tangente $\gamma'(t)$.

Se $\gamma : I \rightarrow M$ é uma curva mergulhada, qualquer campo vetorial ao longo de γ pode ser estendido a um campo vetorial em M , definido numa vizinhança da imagem de γ , fato que nem sempre ocorre quando, por exemplo, γ tem auto-interseções.

Proposição 1. Dado uma curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow M$, existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial X ao longo de γ um outro campo vetorial $\frac{DX}{dt}$ ao longo de γ , chamado a *derivada covariante* de X ao longo de γ , satisfazendo as seguintes propriedades:

- (a) $\frac{D}{dt}(X + Y) = \frac{DX}{dt} + \frac{DY}{dt}$,
- (b) $\frac{D}{dt}(fX) = \frac{df}{dt}X + f\frac{DX}{dt}$,
- (c) Se X admite uma extensão a um campo vetorial $\tilde{X}$ definido num aberto $U \subset M$, então

$$\frac{DX}{dt}(t) = \left(\nabla_{\gamma'(t)} \tilde{X} \right) (\gamma(t)),$$

com $\gamma(t) \in U$, onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de M .

Demonstração. Suponha, inicialmente, que exista uma correspondência satisfazendo os itens (a), (b) e (c), e seja (U, φ) uma carta local em M , com $\gamma(I) \cap U \neq \emptyset$. Se X é um campo vetorial ao longo de γ , podemos escrever

$$X(t) = \sum_j a_j(t) X_j(t),$$

onde $X_j(t) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\gamma(t))$. Dos itens (a) e (b) segue que

$$\frac{DX}{dt} = \sum_j \left(\frac{da_j}{dt} X_j + a_j \frac{DX_j}{dt} \right).$$

Por outro lado, se $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ é a expressão local da curva γ em U , segue do item (c) que

$$\frac{DX_j}{dt} = \nabla_{\gamma'(t)} X_j = \nabla_{\sum_i \frac{dx_i}{dt} X_i} X_j = \sum_i \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i} X_j.$$

Assim,

$$\frac{DX}{dt} = \sum_j \frac{da_j}{dt} X_j + \sum_{i,j} a_j \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i} X_j. \quad (1.1)$$

Segue de (1.1) que se tal correspondência existe, então ela é única. Em relação à existência, dado um campo vetorial X ao longo de γ , defina $\frac{DX}{dt}$, na vizinhança coordenada U , por (1.1). Pela própria construção, o campo em (1.1) satisfaz as propriedades (a), (b) e (c). Se (V, ψ) é outra carta local em M , com $U \cap V \neq \emptyset$, defina $\frac{DX}{dt}$ em V por (1.1). Note que as duas definições coincidem em $U \cap V$ em virtude da unicidade de $\frac{DX}{dt}$ em U . Esta definição pode ser estendida a toda variedade M . $\square$

Definição 2. Um campo vetorial X ao longo de uma curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow M$ é chamado *paralelo* se $\frac{DX}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

Proposição 3. Dados uma curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow M$ e um vetor tangente $v_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$, com $t_0 \in I$, existe um único campo vetorial paralelo X ao longo de γ tal que $X(t_0) = v_0$.

Demonstração. Suponha, inicialmente, que a imagem $\gamma(I)$ esteja contida numa vizinhança coordenada (U, φ) . Seja

$$\varphi(\gamma(t)) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

a expressão local de γ em U , e escreva

$$v_0 = \sum_j a_j^0 X_j(t_0),$$

onde $X_j(t) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\gamma(t))$. Suponha que exista um campo vetorial X em U , paralelo ao longo de γ , com $X(t_0) = v_0$. Assim, o campo vetorial

$$X = \sum_j a_j X_j$$

satisfaz

$$\frac{DX}{dt} = \sum_k \left(\frac{da_k}{dt} + \sum_{i,j} a_j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right) X_k = 0,$$

que é equivalente a

$$\frac{da_k}{dt} + \sum_{i,j} a_j \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} = 0, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (3.1)$$

Este é um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem nas funções $a_1, \dots, a_n$, o qual possui solução única satisfazendo a condição inicial $a_k(t_0) = a_k^0$. Assim, se X existe, ele é único. Além disso, como o sistema (3.1) é linear, qualquer solução está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, provando a existência e unicidade de X com as propriedades desejadas. Para o caso geral, considere um instante qualquer $t_1 \in I$. Por compacidade, o segmento de curva $\gamma([t_0, t_1]) \subset M$ pode ser coberto por um número finito de vizinhanças coordenadas, em cada uma das quais X pode ser definido como no caso anterior. Pela unicidade, as definições devem coincidir na interseção de duas vizinhanças coordenadas e, com isso, X está definido em todo subintervalo $[t_0, t_1]$. $\square$

Segue da prova da Proposição 3 que a aplicação que associa a cada vetor $v_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$ o campo vetorial paralelo X ao longo de γ , com $X(t_0) = v_0$, é linear. Avaliando X em outro instante t_1 , obtemos uma aplicação linear

$$P_{t_0, t_1}^\gamma : T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t_1)}M,$$

chamada *aplicação transporte paralelo ao longo de γ de t_0 a t_1* .

Proposição 4. Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável. As aplicações de transporte paralelo ao longo de γ satisfazem as seguintes propriedades:

- (a) P_{t_0, t_0}^γ é a aplicação identidade de $T_{\gamma(t_0)}M$,
- (b) $P_{t_1, t_2}^\gamma \circ P_{t_0, t_1}^\gamma = P_{t_0, t_2}^\gamma$,
- (c) $(P_{t_0, t_1}^\gamma)^{-1} = P_{t_1, t_0}^\gamma$,
- (d) $P_{t_0, t_1}^\gamma : T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t_1)}M$ é uma isometria.

Demonstração. Os itens (a), (b) e (c) seguem diretamente da definição. Em relação ao item (d), se X é um campo vetorial paralelo ao longo de γ , então $\frac{DX}{dt} = 0$. Assim,

$$\frac{d}{dt} \langle X(t), X(t) \rangle = 2 \left\langle \frac{DX}{dt}(t), X(t) \right\rangle = 0,$$

logo a norma de X é constante ao longo de γ . $\square$

Exemplo 5. Seja $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial ao longo de uma curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, com

$$X(t) = \sum_i a_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t)).$$

Da equação (3.1), segue que X é paralelo ao longo de γ se, e somente se, as funções coordenadas a_k são constantes, ou seja, X é constante.

Exemplo 6. Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ dada por $\gamma(t) = (t, y_0)$, com $y_0 > 0$. Denote por

$$X(t) = a(t) \frac{\partial}{\partial x} + b(t) \frac{\partial}{\partial y}$$

um campo vetorial ao longo de γ , onde $a, b \in C^\infty(\mathbb{R})$. Então, usando o Exemplo ??, temos:

$$\begin{aligned} \frac{DX}{dt} &= a' \frac{\partial}{\partial x} + a \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} + b' \frac{\partial}{\partial y} + b \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} \\ &= a' \frac{\partial}{\partial x} + \frac{a}{y_0} \frac{\partial}{\partial y} + b' \frac{\partial}{\partial y} - \frac{b}{y_0} \frac{\partial}{\partial x} \\ &= \left(a' - \frac{b}{y_0} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(b' + \frac{a}{y_0} \right) \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

A condição para que X seja paralelo é

$$a' = \omega b \quad \text{e} \quad b' = -\omega a,$$

onde $\omega = 1/y_0$. A solução geral deste sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem é

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 \cos \omega t + b_0 \sin \omega t, \\ b(t) &= -a_0 \sin \omega t + b_0 \cos \omega t, \end{aligned}$$

onde $a(0) = a_0$ e $b(0) = b_0$. Assim,

$$P_{0,t}^\gamma \left(a_0 \frac{\partial}{\partial x} + b_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) = (a_0 \cos \omega t + b_0 \sin \omega t) \frac{\partial}{\partial x} + (-a_0 \sin \omega t + b_0 \cos \omega t) \frac{\partial}{\partial y}.$$