

Base

Definição Uma tripla ordenada $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de vetores LI chama-se de base de V^3 .

Vimos que qualquer vetor $\vec{x}$ em V^3 é combinação linear única de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, ou seja

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$

e os escalares x_1, x_2, x_3 são únicos para cada vetor $\vec{x}$.

Chamamos $(x_1, x_2, x_3)_E \in \mathbb{R}^3$ das coordenadas do vetor $\vec{x}$

na base E . Escrevemos $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)_E$.

Vamos interpretar os conceitos que vimos até agora sobre vetores usando suas coordenadas.

Propriedades

$$(a) \quad (x_1, x_2, x_3)_E + (y_1, y_2, y_3)_E = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)_E$$

(As coordenadas da soma de vetores são as somas das coordenadas dos vetores.)

$$(b) \quad \alpha (x_1, x_2, x_3)_E = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)_E$$

(As coordenadas de um vetor multiplicado por um escalar são a multiplicação das coordenadas do vetor pelo mesmo escalar.)

Demonstração

$$\begin{aligned} (a) \quad (x_1, x_2, x_3)_E + (y_1, y_2, y_3)_E &= x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 + y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3 \\ &= (x_1 + y_1) \vec{e}_1 + (x_2 + y_2) \vec{e}_2 + (x_3 + y_3) \vec{e}_3 \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)_E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad \alpha (x_1, x_2, x_3)_E &= \alpha (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3) \\ &= \alpha x_1 \vec{e}_1 + \alpha x_2 \vec{e}_2 + \alpha x_3 \vec{e}_3 \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)_E \end{aligned}$$



Dependência linear de dois vetores usando Coordenadas:

Sejam $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_E$

$$\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_E$$

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD se, e somente se, existem x, y não ambos nulos

tal que $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{0}$.

Usando a proposição anterior

$$x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (xa_1 + ya_2, xb_1 + yb_2, xc_1 + yc_2)_E = (0, 0, 0)_E$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xa_1 + ya_2 = 0 \\ xb_1 + yb_2 = 0 \\ xc_1 + yc_2 = 0 \end{cases} \quad \text{com } x, y \text{ não ambos nulos}$$

Considerando duas equações de cada vez, obtemos o seguinte resultado.

Proposição Dois vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_E$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_E$ são LD se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Caso contrário, eles são LI.

Exemplos 1. Verifique se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI ou LD:

(a) $\vec{u} = (0, 1, 0)_E$, $\vec{v} = (1, 0, 1)_E$

(b) $\vec{u} = (1, -3, 14)_E$, $\vec{v} = (\frac{1}{14}, -\frac{3}{14}, 1)_E$

2. Determine m e n de modo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam LD, sendo

$$\vec{u} = (1, m, n+1)_E$$

$$\vec{v} = (m, n, 10)_E$$

Dependência linear de três vetores usando coordenadas

Proposição

Os vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_E$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_E$, $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)_E$
São L.D. se, e somente se,

$$\begin{array}{l} \vec{u} \rightarrow \\ \vec{v} \rightarrow \\ \vec{w} \rightarrow \end{array} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Caso contrário, eles são L.I.

Demonstração

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são L.D. se, e somente se, existem x, y, z não todos nulos
talque $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} \text{Temos } x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} &= (xa_1 + ya_2 + za_3, xb_1 + yb_2 + zb_3, xc_1 + yc_2 + zc_3)_E \\ &= (0, 0, 0)_E \end{aligned}$$

Então $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são L.D. se, e somente se, o sistema linear

$$\begin{cases} xa_1 + ya_2 + za_3 = 0 \\ xb_1 + yb_2 + zb_3 = 0 \\ xc_1 + yc_2 + zc_3 = 0 \end{cases}$$

possui uma solução $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, ou seja, se e somente se

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$



Exemplos

1. Verifique se $\vec{u} = (1, -1, 2)_E$, $\vec{v} = (-3, 4, 1)_E$, $\vec{w} = (1, 0, 9)_E$ são LI ou LD.
2. Calcule m para que os vetores
 $\vec{u} = (m, 1, 1+m)_E$
 $\vec{v} = (1, 2, m)_E$
 $\vec{w} = (1, 1, 1)_E$
sejam LD.
3. Sendo $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ^{de V^3} base e que
 $\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$
(a) Mostre que $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é base de V^3 .
(b) Calcule as coordenadas do vetor $\vec{v} = (1, 1, 1)_E$ na base F .

Alguns pontos importantes

- * Em V^3 , uma base é formada por 3 vetores LI. (As bases não são únicas!)
- * A importância de ter uma base é que qualquer vetor em V^3 pode ser representado de uma maneira única com uma tripla ordenada de números reais, ou seja, podemos identificar V^3 com $\mathbb{R}^3$.
- * Todas as propriedades sobre vetores podem ser enunciadas usando coordenadas.
- * As operações sobre vetores podem ser feitas usando coordenadas que é mais fácil e mais prático (especialmente se quisermos usar ^{um} computador).

Mudança de base

Sabemos que V^3 não possui uma única base.

Dadas duas bases $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ de V^3 , um vetor $\vec{v}$ de V^3 tem coordenadas $(x_1, x_2, x_3)_E$ na base E e coordenadas $(y_1, y_2, y_3)_F$ na base F .

Qual é a relação entre as duas coordenadas?

Responder a esta pergunta é objetivo da aula de hoje.

Como E é uma base e $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ são vetores de V^3 , eles tem coordenadas na base E , ou sejam existem escalares a_{ij} tal que

$$\begin{aligned}\vec{f}_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 &= a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3\end{aligned}$$


coeficiente de $\vec{e}_i$ índice de $\vec{f}_j$

$$\text{Logo } \vec{v} = y_1 \vec{f}_1 + y_2 \vec{f}_2 + y_3 \vec{f}_3$$

$$\begin{aligned}&= y_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3) + y_2(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3) + y_3(a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3) \\&= (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3)\vec{e}_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3)\vec{e}_2 + (a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3)\vec{e}_3 \\&= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3\end{aligned}$$

Pela unicidade das coordenadas, temos

$$x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3$$

$$x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3$$

$$x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3$$

Escrevendo as equações na forma matricial, obtemos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_F$$

A matriz

$$M_{EF} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ chama-se de matriz de mudança de base } E \text{ para base } F.$$

A primeira coluna da matriz M_{EF} é formada pelas coordenadas do vetor $\vec{f}_1$ na base E , a segunda coluna pelas coordenadas do vetor $\vec{f}_2$ na base E e a terceira coluna pelas coordenadas do vetor $\vec{f}_3$ na base E .

Escrevemos

$$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}_E = M_{EF} \begin{pmatrix} \end{pmatrix}_F$$

Como $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ são LI (F é uma base), sabemos que o determinante da matriz M_{EF} não é nulo. Portanto M_{EF} possui uma matriz inversa $(M_{EF})^{-1}$:

$$M_{EF} \cdot (M_{EF})^{-1} = (M_{EF})^{-1} \cdot M_{EF} = I_d$$

onde

$$I_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ é a matriz identidade}$$

Exemplos 1. Mostre que $M_{EE} = I_d$.

2. Determine a, b, c sabendo que $(1, 1, 2)_E = (2, 1, 0)_F$ e $M_{FE} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 2 & 1 & b \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix}$

3. Escreva a matriz de mudança da base $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

para base $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ sabendo que

$$\vec{f}_1 = (-3, 1, 1)_E, \vec{f}_2 = (1, -2, 1)_E, \vec{f}_3 = (1, 2, 0)_E.$$

Quais são as coordenadas do vetor $\vec{u} = (-4, 1, -1)_F$ na base E ?

Proposição Sejam E, F, G três bases de V^3 . Então

$$M_{EF} \cdot M_{FG} = M_{EG}.$$

Demonstração Exercício.

Corolário: $M_{FE} = (M_{EF})^{-1}$

Demonstração: Temos $M_{FE} \cdot M_{EF} = M_{FF} = Id$
 $M_{EF} \cdot M_{FE} = M_{EE} = Id$

Portanto M_{FE} é a matriz inversa de M_{EF} . $\square$

Exercício

Sejam $E = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ uma base de V^3 e $F = (\vec{v} - \vec{u}, \vec{u} - \vec{w}, \vec{u})$.

1. Mostre que F é uma base de V^3 .

2. Calcule as coordenadas de $\vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w}$ na base F .

Solução: 1) Sejam $\vec{f}_1 = \vec{v} - \vec{u}$, $\vec{f}_2 = \vec{u} - \vec{w}$, $\vec{f}_3 = \vec{u}$. Temos

$$\vec{f}_1 = (-1, 1, 0)_E,$$

$$\vec{f}_2 = (1, 0, -1)_E,$$

$$\vec{f}_3 = (1, 0, 0)_E.$$

Como $\begin{vmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, os vetores $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ são LI
(Proposição na página 22).

Portanto $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é uma base de V^3 .

2) O vetor $\vec{x} = \vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w}$ tem coordenadas $(1, 2, 3)_E$. Sejam

$(x, y, z)_F$ suas coordenadas na base F .

Temos $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_F = M_{FE} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_E$. Precisamos achar a matriz de mudança

da base F para base E . Para isso, precisamos das coordenadas dos vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ da base E na base F .

Temos

$$\vec{f}_1 = \vec{v} - \vec{u} \quad (1)$$

$$\vec{f}_2 = \vec{u} - \vec{w} \quad (2)$$

$$\vec{f}_3 = \vec{u} \quad (3)$$

(3) $\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{f}_3$. Substituindo em (1) e (2) obtemos

$$\vec{v} = \vec{f}_1 + \vec{f}_3,$$

$$\vec{w} = -\vec{f}_2 + \vec{f}_3.$$

Portanto, $\vec{u} = (0, 0, 1)_F$, $\vec{v} = (1, 0, 1)_F$, $\vec{w} = (0, -1, 1)_F$ e

$$M_{FE} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dai, obtemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}_F.$$