

Integrais duplas sobre regiões genéricas

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto limitado e $R = [a, b] \times [c, d]$ um retângulo que contém D . Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Definimos uma nova função g com domínio R por

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in D \\ 0 & \text{se } (x, y) \in R \text{ mas } (x, y) \notin D \end{cases}$$

Se a fronteira de D consiste de um número finito de curvas de classe C^1 , então g é integrável e definimos a integral dupla de f sobre D por

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R g(x, y) dA.$$

Consideremos, inicialmente, um subconjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ descrito como

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

onde g_1 e g_2 são funções de classe C^1 no intervalo $[a, b]$ e $g_1 \leq g_2$. Tal subconjunto é chamado **região de tipo I**.

Exemplos de regiões deste tipo podem ser vistos na Figura 13.

Numa região de tipo I, para cada $t \in [a, b]$, a reta $x = t$ intercepta D segundo um segmento de reta compreendido entre as curvas $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$.

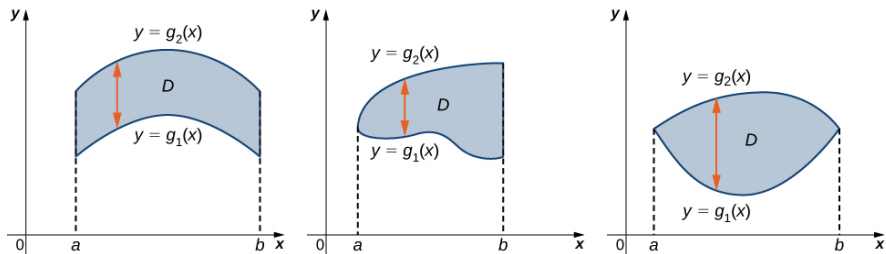


Figura: 13. Algumas regiões de tipo I

Uma região D de tipo II é descrita por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

onde h_1 e h_2 são funções de classe C^1 em $[c, d]$ e $h_1 \leq h_2$.

Exemplos de regiões deste tipo podem ser vistos na Figura 14.

Numa região de tipo II, para cada $t \in [c, d]$, a reta $y = t$ intercepta D segundo um segmento de reta compreendido entre a curvas $x = h_1(y)$ e $x = h_2(y)$.

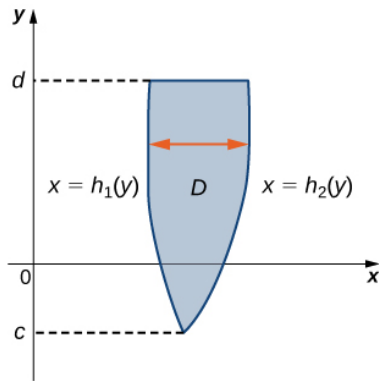
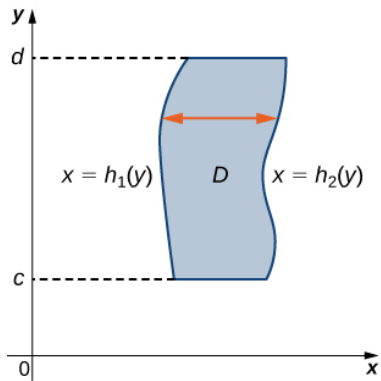


Figura: 14. Algumas regiões de Tipo II

Exemplo 1. Considere a região no primeiro quadrante entre as funções $y = \sqrt{x}$ e $y = x^3$ (Figura 15). Descreva a região primeiro de tipo I e depois de tipo II.

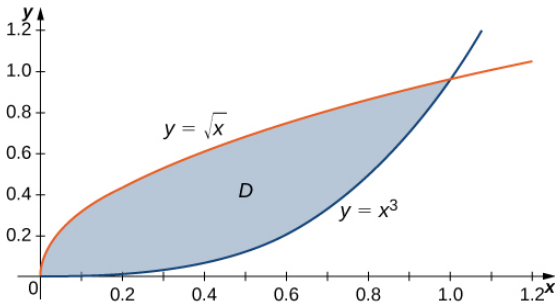


Figura: 15. Região D pode ser descrita de tipos I e II.

Solução. Ao descrever uma região de tipo I, precisamos identificar a função que está acima da região e a função que está abaixo da região. Aqui, a região D é limitada acima por $y = \sqrt{x}$ e abaixo por $y = x^3$ no intervalo para $x \in [0, 1]$. Assim, como tipo I, D é descrito como o conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

No entanto, ao descrever uma região de tipo II, precisamos identificar a função que fica à esquerda da região e a função que fica à direita da região. Aqui, a região D é limitada à esquerda por $x = y^2$ e à direita por $x = \sqrt[3]{y}$ no intervalo para y em $[0, 1]$. Assim, como tipo II, D é descrito como o conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq \sqrt[3]{y}\}.$$

O próximo teorema é uma consequência do Teorema de Fubini.

Teorema 6. Se f é contínua em uma região D de tipo I, então

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx. \quad (5)$$

Se f é contínua em uma região D de tipo II, então

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right] dy. \quad (6)$$

Demonstração. Se D é uma região de tipo I, seja $R = [a, b] \times [c, d]$ um retângulo contendo D . Por definição e pelo Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) dA &= \iint_R g(x, y) dA = \int_a^b \left[\int_c^d g(x, y) dy \right] dx \\&= \int_a^b \left[\int_c^{g_1(x)} g(x, y) dy + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} g(x, y) dy + \int_{g_2(x)}^d g(x, y) dy \right] dx \\&= \int_a^b \left[\int_c^{g_1(x)} 0 dy + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy + \int_{g_2(x)}^d 0 dy \right] dx \\&= \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx\end{aligned}$$

Utilizando o mesmo tipo de argumento que usamos para provar (5) podemos mostrar (6) se a região D é de tipo II.

Por (6),

$$\begin{aligned}\iint_D (3x^2 + y^2) dA &= \int_{-2}^3 \int_{y^2-3}^{y+3} (3x^2 + y^2) dx dy \\&= \int_{-2}^3 (x^3 + xy^2) \Big|_{x=y^2-3}^{x=y+3} dy \\&= \int_{-2}^3 ((y+3)^3 + (y+3)y^2 - (y^2-3)^3 - (y^2-3)y^2) dy \\&= \int_{-2}^3 (-y^6 + 8y^4 + 2y^3 - 12y^2 + 27y + 54) dy \\&= \left[-\frac{y^7}{7} + \frac{8y^5}{5} + \frac{y^4}{2} - 4y^3 + \frac{27y^2}{2} + 54y \right] \Big|_{-2}^3 \\&= \frac{2375}{7}.\end{aligned}$$

Exemplo 7. Determine o volume do tetraedro T limitado pelos planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$.

Solução. Para a resolução de uma questão como esta, é prudente desenhar o sólido tridimensional e a região plana D sobre a qual o sólido está. A Figura 17(a) mostra o tetraedro limitado pelos planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$. Como o plano $x + 2y + z = 2$ intercepta o plano xy (cuja equação é $z = 0$) na reta $x + 2y = 2$, vemos que T está acima da região triangular D no plano xy limitado pelas retas $x = 2y$, $x + 2y = 2$ e $x = 0$ (Veja a Figura 17(b).)

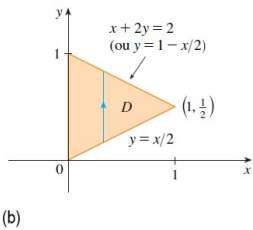
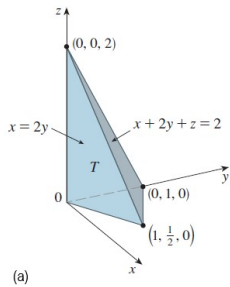


Figura: 17.

O plano $x + 2y + z = 2$ pode ser escrito como $z = 2 - x - 2y$, de modo que o volume pedido está sob o gráfico da função $z = 2 - x - 2y$ e acima de

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x/2 \leq y \leq 1 - x/2\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (2 - x - 2y) \, dA = \int_0^1 \left[\int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y) \, dy \right] dx \\ &= \int_0^1 [2y - xy - y^2] \Big|_{y=x/2}^{y=1-x/2} dx \\ &= \int_0^1 [2 - x - x(1 - x/2) - (1 - x/2)^2 - x + x^2/2 + x^2/4] \, dx \\ &= \int_0^1 [x^2 - 2x + 1] \, dx = [x^3/3 - x^2 + x] \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Exemplo 8. Calcule a integral iterada $\int_0^1 \left[\int_x^1 \sin(y^2) dy \right] dx$.

Solução. Se tentarmos calcular essa integral na forma pela qual ela se apresenta, teremos de resolver o problema de calcular $\int \sin(y^2) dy$. Mas isso é impossível de fazer em termos finitos, uma vez que $\int \sin(y^2) dy$ não se escreve como uma combinação linear de funções elementares. Para superar esta dificuldade mudamos a ordem de integração, o que pode ser feito escrevendo-se inicialmente a integral iterada dada como uma integral dupla e aplicando o Teorema de Fubini.

$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) dy dx = \iint_D \sin(y^2) dA$$

onde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}.$$

Vemos que um modo alternativo de escrever D é

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}.$$

Usando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) dy dx &= \iint_D \sin(y^2) dA \\ &= \int_0^1 \int_0^y \sin(y^2) dx dy = \int_0^1 x \sin(y^2) \Big|_{x=0}^{x=y} dy \\ &= \int_0^1 y \sin(y^2) dy = -\frac{1}{2} \cos(y^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1 - \cos 1). \end{aligned}$$

Exemplo 9. Encontre o volume do sólido limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + z^2 = a^2$, onde $a > 0$.

Solução. O volume do sólido é oito vezes o volume do sólido S no primeiro octante de $\mathbb{R}^3$ limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + z^2 = a^2$. A base do sólido S é a região D no plano xy dada por

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} \right\}.$$

Para cada $(x, y) \in D$, a altura do sólido S é $z = \sqrt{a^2 - x^2}$. Então o volume de S é

$$V(S) = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2} \, dA.$$

Pela fórmula (5),

$$\begin{aligned} V(S) &= \iint_D \sqrt{a^2 - x^2} dA = \int_0^a \left[\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2} dy \right] dx \\ &= \int_0^a \left[y \sqrt{a^2 - x^2} \right] \Big|_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int_0^a (a^2 - x^2) dx \\ &= \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{2a^3}{3}. \end{aligned}$$

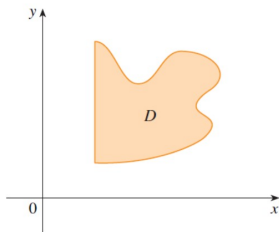
Portanto, o volume do sólido pedido é $\frac{16a^3}{3}$.

Exercício. Encontre o volume do sólido limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$ e $y^2 + z^2 = a^2$, onde $a > 0$.

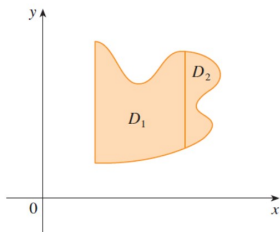
O próximo teorema é útil para calcular integrais duplas sobre regiões D no plano que não são de tipo I e nem de tipo II.

Teorema 7. Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável e $D = D_1 \cup D_2$, sendo D_1 e D_2 duas regiões sem pontos em comum, exceto possivelmente um número finito de curvas suaves, então

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA.$$



(a) D não é do tipo I nem do tipo II.



(b) $D = D_1 \cup D_2$, D_1 é do tipo I, D_2 é do tipo II.

Exemplo 10. Expresse a região D mostrada na Figura 19 como uma união de regiões do Tipo I ou Tipo II e calcule a integral

$$\iint_D (2x + 5y) \, dA.$$

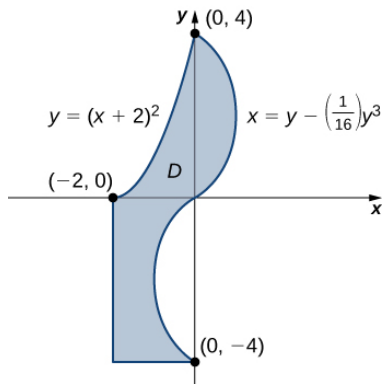


Figura: 19.

Solução. $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, onde

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq (x+2)^2\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4, 0 \leq x \leq y - \frac{1}{16}y^3\},$$

$$D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq y \leq 0, -2 \leq x \leq y - \frac{1}{16}y^3\}.$$

Essas regiões são ilustradas na Figura 20.

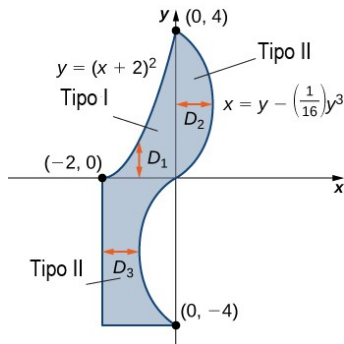


Figura: 20.

Portanto,

$$\begin{aligned} & \iint_D (2x + 5y) \, dA \\ &= \iint_{D_1} (2x + 5y) \, dA + \iint_{D_2} (2x + 5y) \, dA + \iint_{D_3} (2x + 5y) \, dA \\ &= \int_{-2}^0 \int_0^{(x+2)^2} (2x + 5y) \, dy \, dx + \int_0^4 \int_0^{y - \frac{1}{16}y^3} (2x + 5y) \, dx \, dy \\ &\quad + \int_{-4}^0 \int_{-2}^{y - \frac{1}{16}y^3} (2x + 5y) \, dx \, dy \\ &= \frac{1304}{105} \text{ (Verifique.)} \end{aligned}$$

Exemplo 11. Mostre que a área $A(D)$ de uma região D no plano xy é

$$A(D) = \iint_D 1 \, dA, \quad (7)$$

desde que a função $f(x, y) = 1$ seja integrável sobre a região D .

Solução. O cilindro sólido cuja base é D e altura é 1 tem volume igual a $A(D) \cdot 1 = A(D)$. Por lado, se $f(x, y) = 1$ é integrável sobre a região D , então o volume desse cilindro é $\iint_D 1 \, dA$. Portanto,

$$A(D) = \iint_D 1 \, dA.$$

Pelo Teorema 4 e Exemplo 11, temos

Teorema 8. Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável e $m \leq f(x, y) \leq M$ para todo $(x, y) \in D$, então

$$mA(D) \leq \iint_D f(x, y) dA \leq MA(D).$$

onde $A(D)$ denota a área de D .

Exemplo 12. Estime a integral $\iint_D e^{\sin x \cos y} dA$, onde D é um disco de raio 2.

Resolução. Como $-1 \leq \sin x \cos y \leq 1$, temos

$$e^{-1} \leq e^{\sin x \cos y} \leq e^1 = e, \quad \forall (x, y) \in D.$$

Aplicando o Teorema 8 para $m = e^{-1}$, $M = e$, $A(D) = 4\pi$, obtemos

$$\frac{4\pi}{e} \leq \iint_D e^{\sin x \cos y} dA \leq 4\pi e.$$