

3. Séries numéricas

Definição: Considere uma sequência numérica (a_n) .

A sequência (s_n) , cujo termo geral é

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k,$$

chama-se série numérica associada a sequência (a_n) . O limite da série, finito ou infinito, é chamado a soma da série e denotado por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Se a soma for finita, diremos que a série é convergente; caso seja infinita ($+\infty$ ou $-\infty$) ou se o limite não existir, diremos que a série é divergente.

Exemplo (série geométrica): Dado $r \in \mathbb{R}$, com $r \neq \pm 1$, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

chama-se a série geométrica de razão r . Já vimos que

$$s_n = \sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Amim,

(13)

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \begin{cases} \frac{1}{1-r}, & \text{se } |r| < 1 \\ +\infty, & \text{se } r > 1 \\ \text{diverge}, & \text{se } r < -1 \end{cases}$$

Exemplo (série harmônica): Dado $\alpha \in \mathbb{N}$, a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

chama-se série harmônica de ordem α . De forma análoga ao caso $\alpha=2$, prova-se que a série é crescente e limitada superiormente p/ $\alpha \geq 2$, logo é convergente. O caso $\alpha=1$ também já foi visto e, neste caso, a série é divergente.

Exemplo (série telescópica): Dado uma sequência numérica (a_n) , $n \geq 0$, considere a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n),$$

a qual é chamada série telescópica. Afirmamos que

$$S_n = \sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0.$$

De fato, provaremos a afirmação acima através

do método da indução finita. Para $n=0$, temos: (14.)

$$\Lambda_0 = \sum_{k=0}^0 (a_{k+1} - a_k) = a_1 - a_0,$$

que é claramente verdadeiro. Suponhamos agora a afirmação verdadeira p/ um certo natural n , i.e., supomos que $\Lambda_n = a_{n+1} - a_0$ seja verdadeiro, e provemos que para o sucessor $n+1$ também é verdade. Ou seja, devemos provar que

$$\Lambda_{n+1} = a_{n+2} - a_0.$$

De fato,

$$\begin{aligned}\Lambda_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) + (a_{n+2} - a_{n+1}) \\ &= \Lambda_n + (a_{n+2} - a_{n+1}) = (a_{n+1} - a_0) + (a_{n+2} - a_{n+1}) \\ &= a_{n+2} - a_0,\end{aligned}$$

como queríamos. Portanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) = \begin{cases} L - a_0, & \text{se } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \\ \text{diverge, se } (a_n) \text{ diverge} \end{cases}.$$

Exemplo: Como caso particular, considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Decompondo a série como

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

e definindo $a_n = -\frac{1}{n}$, segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é telescópica, pois

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n).$$

Além disso, como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 0$, tem-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_1) = 0 - (-1) = 1.$$

Vejamos a seguir algumas propriedades imediatas das séries numéricas.

Propriedades: Considere duas séries convergentes, digamos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$, e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b$$

$$(ii) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \cdot a$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Dem.:

(iii) Como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$, isso significa que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a,$$

onde $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Isso segue também que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = a.$$

Como $a_n = s_n - s_{n-1}$, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = 0.$$

□

Segue diretamente do item (iii) da Proposição acima o seguinte critério para testar a divergência de uma série.

Corolário: Se uma série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ satisfaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \text{ ou se } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ não existir, então a}$$

série é divergente.

Obs.: O item (iii) da Proposição anterior nos dá uma condição necessária para que uma dada série numérica seja convergente, mas não suficiente. Por a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ satisfaz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, no entanto é divergente.