

A conexão de Levi-Civita

Uma variedade diferenciável M vem naturalmente munida com uma noção de derivada de funções diferenciáveis. No entanto, não existe uma maneira canônica de derivar campos de vetores em M . A noção de conexão afim, que introduziremos agora, vai ao encontro desse problema.

Definição 1. Uma *conexão afim* em M é uma aplicação

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que, a cada par de campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, associa um outro campo vetorial $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$, satisfazendo as seguintes propriedades:

(a) $\nabla_X Y$ é linear sobre $C^\infty(M)$ em X :

$$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$$

(b) $\nabla_X Y$ é linear sobre $\mathbb{R}$ em Y :

$$\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z.$$

(c) ∇ satisfaz a seguinte regra do produto:

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y.$$

O que faremos agora é analisar a dependência de uma conexão afim ∇ em cada um dos seus parâmetros.

Proposição 2. Dados um ponto $p \in M$ e campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o valor $(\nabla_X Y)(p)$ depende somente de $X(p)$ e da restrição de Y ao longo de uma curva diferenciável $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = X(p)$.

Demonstração. Mostremos inicialmente que, em qualquer aberto $U \subset M$, o campo vetorial $(\nabla_X Y)|_U$ depende somente de $X|_U$ e $Y|_U$. De fato, sejam $X', Y' \in \mathfrak{X}(M)$ tais que

$$X'|_U = X|_U \quad \text{e} \quad Y'|_U = Y|_U.$$

Considere uma função $f \in C^\infty(M)$, com $\text{supp } f \subset U$, tal que $f \equiv 1$ em um aberto V de M , com $p \in V \subset \overline{V} \subset U$. Então, usando o item (b) da Definição 1 e o fato que $fX = fX'$ em M , temos

$$\begin{aligned} (\nabla_X Y)(p) &= f(p)(\nabla_X Y)(p) = (f\nabla_X Y)(p) = (\nabla_{fX} Y)(p) \\ &= (\nabla_{fX'} Y)(p) = f(p)(\nabla_{X'} Y)(p) \\ &= (\nabla_{X'} Y)(p). \end{aligned}$$

Isso mostra que $\nabla_X Y = \nabla_{X'} Y$ no aberto U . Por outro lado, como $fY = fY'$ em M , temos $\nabla_X(fY) = \nabla_X(fY')$. Assim, usando o item (c) e o fato que $X(p)(f) = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} (\nabla_X Y)(p) &= f(p)(\nabla_X Y)(p) = f(p)(\nabla_X Y)(p) + X(p)(f)Y(p) \\ &= (f\nabla_X Y)(p) + (X(f)Y)(p) = (f\nabla_X Y + X(f)Y)(p) \\ &= (\nabla_X(fY))(p) = (\nabla_X(fY'))(p) \\ &= (\nabla_X Y')(p), \end{aligned}$$

mostrando que $\nabla_X Y = \nabla_X Y'$ em U . Isso mostra que $(\nabla_X Y)|_U$ depende somente de $X|_U$ e $Y|_U$. Considere agora uma carta local (U, φ) em M , com $p \in U$ e $\varphi \sim (x_1, \dots, x_n)$. Pelo que já foi provado, temos que

$$(\nabla_X U)|_U = \nabla_{X|_U}(Y|_U).$$

Escrevamos

$$X|_U = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad Y|_U = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

com $a_i, b_j \in C^\infty(U)$. Usando as propriedades de ∇ no aberto U , temos

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X \left(\sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_j \left(b_j \nabla_X \frac{\partial}{\partial x_j} + X(b_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{i,j} \left(a_i b_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + a_i \frac{\partial}{\partial x_i} (b_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{i,j,k} a_i b_j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \end{aligned}$$

onde

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Assim, a representação local de $\nabla_X Y$ na carta local (U, φ) é dada por

$$(\nabla_X Y)|_U = \sum_k \left(\sum_{i,j} a_i b_j \Gamma_{ij}^k + \sum_i a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (2.1)$$

Em particular,

$$(\nabla_X Y)(p) = \sum_k \left(\sum_{i,j} a_i(p) b_j(p) \Gamma_{ij}^k(p) + X(p)(b_k) \right) \frac{\partial}{\partial x_k}(p).$$

A fórmula acima envolve somente os valores das funções a_i e b_j em p , e das derivadas direcionais de b_k na direção de $X(p)$, e isso finaliza a prova. $\square$

As funções diferenciáveis Γ_{ij}^k são chamadas os *símbolos de Christoffel* da conexão ∇ em relação à carta local escolhida.

Observação 3. Como consequência da Proposição 2, podemos escrever $\nabla_{X(p)}Y$ ao invés de $(\nabla_X Y)(p)$. Isso pode ser visto como a derivada direcional do campo Y na direção do vetor $X(p)$.

Teorema 4. *Dado uma variedade Riemanniana $(M, \langle, \rangle)$, existe uma única conexão afim ∇ em M , chamada a conexão de Levi-Civita de M , satisfazendo as seguintes propriedades:*

$$(a) \quad X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

$$(b) \quad \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Suponha, inicialmente, a existência de uma tal conexão ∇ . Assim,

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad (4.1)$$

$$Y\langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle, \quad (4.2)$$

$$Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle. \quad (4.3)$$

Somando (4.1) e (4.2), subtraindo (4.3) e usando o item (b), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \nabla_Y X, Z \rangle &= \frac{1}{2} (X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle \\ &\quad - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle) \end{aligned} \quad (4.4)$$

A fórmula (4.4), conhecida como *fórmula de Koszul*, define $\nabla_Y X$ de forma única, pois Z é arbitrário e $\langle, \rangle$ é não-degenerada. Para mostrar a existência, defina ∇ pela fórmula de Koszul. $\square$

Uma conexão satisfazendo o item (a) do Teorema 4 é dita ser *compatível* com a métrica $\langle, \rangle$ (cf. Exercício ??). A condição (b) expressa o fato que a *torção* de ∇ , definida por

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

é nula; diz-se também que a conexão é *simétrica*.

Exemplo 5. Sejam ∇ uma conexão simétrica numa variedade diferenciável M^n e (U, φ) uma carta local em M . Temos:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0,$$

para $1 \leq i, j \leq n$. Isso mostra que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Exemplo 6. O objetivo aqui é mostrar que a conexão de Levi-Civita ∇ em $\mathbb{R}^n$ coincide com a derivada usual de campos vetoriais em $\mathbb{R}^n$. De fato, se $(x_1, \dots, x_n)$ são as coordenadas globais usuais em $\mathbb{R}^n$, temos

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0,$$

para quaisquer $1 \leq i, j \leq n$. Segue então da fórmula de Koszul (4.4) que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = 0$, com $1 \leq i, j \leq n$, ou seja, todos os símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k são nulos. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, e escrevendo

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

onde $a_i, b_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, segue da fórmula (2.1) que

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_k \left(\sum_i a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_k X(b_k) \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= X(Y) = dY(X), \end{aligned}$$

como queríamos.

Exemplo 7. Considere o semi-plano superior

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

munido da métrica Riemanniana

$$\langle, \rangle = \frac{1}{y^2} (dx^2 + dy^2).$$

Calculemos a conexão de Levi-Civita de $(\mathbb{R}_+^2, \langle, \rangle)$. Derivando a expressão

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \frac{1}{y^2}$$

em relação a x e y , e usando o item (a) do Teorema 4, obtemos

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = -\frac{1}{y^3}.$$

Além disso, derivando a expressão

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \frac{1}{y^2}$$

em relação a x e y , obtemos

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = -\frac{1}{y^3}.$$

Por outro lado, do item (b), obtemos

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x} = 0.$$

Assim, derivando

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = 0,$$

obtemos

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \frac{1}{y^3} \quad \text{e} \quad \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = 0.$$

Como $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$ são sempre ortogonais, obtemos

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{e} \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y}.$$