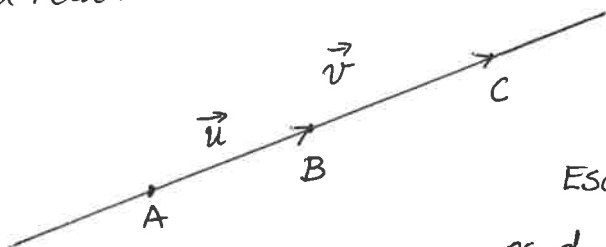


Dependência Linear

1. Caso de dois vetores

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se eles tem a mesma direção. Portanto, eles podem ser representados por pares de pontos de uma mesma reta:



$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{BC}$$

Escolhamos a mesma origem para os dois vetores.

Observe que o vetor nulo $\vec{0}$ é paralelo a qualquer outro vetor:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AA}, \vec{v} = \overrightarrow{AA}; \text{ os pontos } A, A, C \text{ pertencem a uma reta.}$$

Suponha que $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$. Então $\|\vec{u}\| \neq 0$ e $\|\vec{v}\| \neq 0$.

$$\text{Temos } \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \text{ ou } \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = -\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

ou seja

$$\|\vec{v}\|\vec{u} - \|\vec{u}\|\vec{v} = \vec{0} \text{ ou } \|\vec{v}\|\vec{u} + \|\vec{u}\|\vec{v} = \vec{0}.$$

Portanto, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos, existem escalares α, β , não ambos nulos, tal que

$$\boxed{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}} \quad (1)$$

Esta caracterização inclui o caso onde um (ou ambos) dos vetores é nulo.

Reciprocamente, suponha que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ para alguns escalares com $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$.

Suponha (sem perda de generalidade) que $\alpha \neq 0$. Então

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha\vec{u} = -\beta\vec{v} \Rightarrow \vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{v},$$

ou seja, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos.

Portanto,

Proposição: Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se, e somente se, existem escalares α, β não ambos nulos, tal que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$.

Observe que usando a proposição acima, dois vetores não são paralelos se e somente se $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$.

A equação (1) nos disse que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dependem um de outro, por isso que dizemos que dois vetores paralelos são (linearmente) dependentes. Caso contrário, eles são (linearmente) independentes.

Vamos obter conceitos análogos para três vetores.

2. Caso de três vetores

Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ três vetores. Podemos representar $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad \text{e} \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

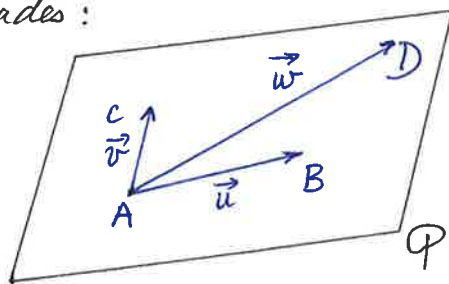
Suponha que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos.

Então A, B, C determinam um plano único P (Axioma I4).

Agora, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ para algum ponto D do espaço.

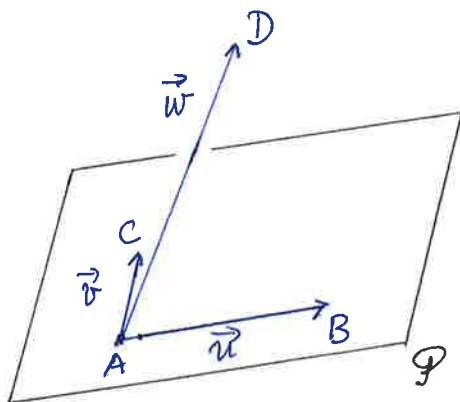
Temos duas possibilidades:

Caso (i): $D \in P$



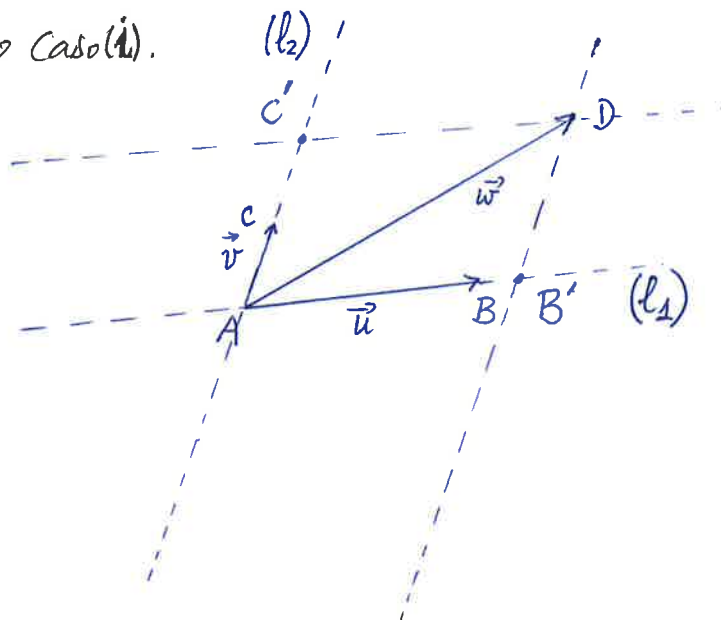
Neste caso, dizemos que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são paralelos ao mesmo plano.

Caso (ii): $D \notin P$



Queremos um critério algébrico para caracterizar os dois casos.

Considere o caso (ii).



Seja l_1 a reta (única) que contém os pontos A e B e seja l_2 a reta (única) que contém os pontos A e C.

Por D passa uma reta única paralela a l_2 . Esta reta intersecta a reta l_1 em um ponto B' . Da mesma maneira, a única reta por D paralela a l_1 intersecta l_2 em um ponto C' . O polígono $AB'DC'$ é um paralelogramo, portanto $\vec{AD} = \vec{AB'} + \vec{AC'}$.

Mas $\vec{AB'} \parallel \vec{AB} = \vec{u}$ e $\vec{AC'} \parallel \vec{AC} = \vec{v}$. Logo,

$$\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \quad \text{para alguns escalares } \alpha, \beta.$$

Equivalentemente,

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0} \quad (\text{com } \gamma = -1 \text{ em nosso caso}).$$

Começamos com os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, mas podemos ter começado com $\vec{u}$ e $\vec{w}$ ou $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e escrever $\vec{v}$ (resp. $\vec{u}$) em função de $\vec{u}$ e $\vec{w}$ (resp. $\vec{v}$ e $\vec{w}$). Colocando todos estes casos juntos, mostramos que se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são paralelos a um mesmo plano, então existem escalares α, β, γ não todos nulos tal que

$$\boxed{\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0}.} \quad (2)$$

Reciprocamente, suponha que $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0}$ com α, β, γ não todos nulos. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\gamma \neq 0$.

$$\text{Logo } \vec{w} = -\frac{\alpha}{\gamma} \vec{u} - \frac{\beta}{\gamma} \vec{v}$$

Isto implica que os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ podem ser representados por pares de pontos de um mesmo plano.

Acabamos de provar a seguinte proposição.

Proposição Três vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são paralelos a um mesmo plano se, e somente se, existem escalares α, β, γ não todos nulos, tal que $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0}$.

Observação

1. Segue da proposição que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ não são paralelos ao mesmo plano (caso (ic), p 14) se, e somente se,

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0} \implies \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

2. A proposição acima inclui o caso onde dois (ou todos) dos $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são paralelos. (Exercício.)

Vamos definir os conceitos que acabamos de usar.

Definição: Se $\vec{x} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}$, dizemos que $\vec{x}$ é combinação linear de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, ou $\vec{x}$ é gerado por $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Os escalares α, β, γ são chamados dos coeficientes da combinação linear.

Três vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são linearmente dependentes (LD) se

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0} \text{ para alguns escalares } \alpha, \beta, \gamma \text{ não todos nulos.}$$

Se $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0} \implies \alpha = \beta = \gamma = 0$, dizemos que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são linearmente independentes (LI).

Observações

1. Os conceitos de LI e LD valem para qualquer número de vetores.
2. Se um dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ é o vetor nulo $\vec{0}$, então $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ são LD.
3. Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD $\Leftrightarrow$ são paralelos
Três vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LD $\Leftrightarrow$ são paralelos a um mesmo plano
 $\Leftrightarrow$ um deles é combinação linear dos outros dois.

Exemplo Mostre que os vetores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, com

$$\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$$

$$\vec{b} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$$

$$\vec{c} = 7\vec{v} - 3\vec{w}$$

são LD.

Solução Precisamos procurar escalares α, β, γ , não todos nulos, do modo que $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$.

Temos $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = (\alpha + 2\beta)\vec{u} + (2\alpha - 3\beta + 7\gamma)\vec{v} + (-\alpha + \beta - 3\gamma)\vec{w}$
Então, basta procurar α, β, γ satisfazendo

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 & (1) \\ 2\alpha - 3\beta + 7\gamma = 0 & (2) \\ -\alpha + \beta - 3\gamma = 0 & (3) \end{cases}$$

Temos um sistema linear de 3 equações com 3 incógnitas α, β, γ .

Equação (1) implica $\alpha = -2\beta$. Substituindo em (2) e (3) obtemos

$$\begin{cases} -7\beta + 7\gamma = 0 \\ +3\beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = \gamma \Rightarrow \alpha = -2\gamma$$

Logo, $-2\gamma\vec{a} + \gamma\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ qualquer que seja $\gamma \in \mathbb{R}$. Esta equação é equivalente a $\gamma(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{0} \Rightarrow -2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

Achamos uma combinação linear de $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ que dá o vetor $\vec{0}$,

com coeficientes não nulos. Portanto $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ são L.D.

(Podemos também usar o método de escalonamento de sistemas Lineares para resolver o sistema de equações (1)-(3).) $\square$

Proposição: Se três vetores são L.I., então qualquer dois deles são L.I.

Demonstração

Suponha, por absurdo, que dois deles $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são L.D., e denote por $\vec{w}$ o terceiro vetor. Então existem α, β , não ambos nulos, tal que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$. Portanto,

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + 0\vec{w} = \vec{0}, \text{ com } \alpha, \beta, \gamma = 0, \text{ não todos nulos.}$$

Ou seja $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são L.D., o que contradiz a hipótese da proposição $\square$

Observação

A recíproca da proposição anterior não vale. (Exercício)

Exemplo

Prove que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ L.I. $\Rightarrow \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}$ são L.I.

Solução

$$\begin{aligned} \text{Temos } \alpha(\vec{u} + \vec{v}) + \beta(\vec{u} + \vec{w}) + \gamma(\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow (\alpha + \beta)\vec{u} + (\alpha + \gamma)\vec{v} + (\beta + \gamma)\vec{w} &= \vec{0} \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{Como } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ são L.I., } (*) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Portanto, $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}$ são L.I.

Proposição

Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são L.I. em V^3 , então qualquer vetor $\vec{x}$ em V^3 é combinação linear única de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Demonstração

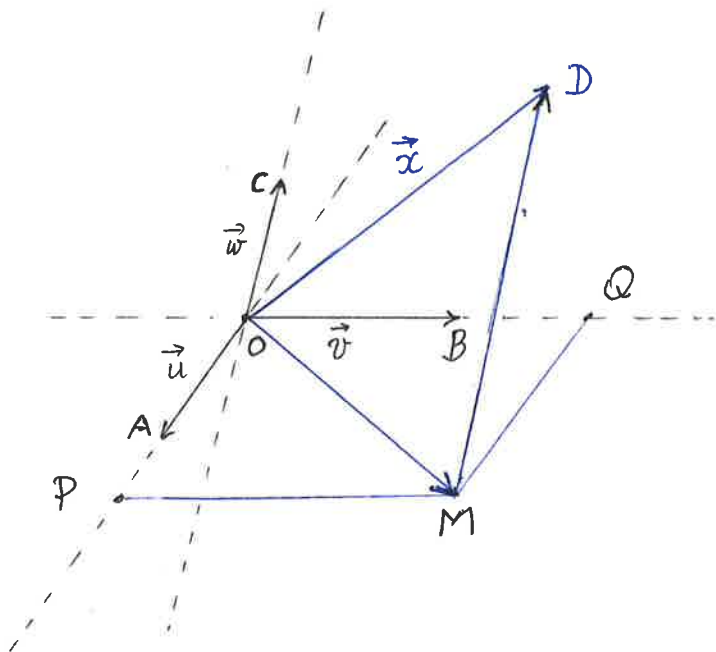
Representamos os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$ como seguinte

$$\vec{u} = \vec{OA}$$

$$\vec{v} = \vec{OB}$$

$$\vec{w} = \vec{OC}$$

$$\text{e } \vec{x} = \vec{OD}$$



Sejam:

M : o ponto de interseção da reta por D e paralela a $\vec{w}$ com o plano P que contém os pontos O, A, B .

Q : o ponto de interseção da reta por M e paralela a $\vec{u}$ com a reta que contém O e B .

P : o ponto de interseção da reta por M e paralela a $\vec{v}$ com a reta que contém O e A .

$$\begin{aligned} \text{Temos: } \vec{x} &= \vec{OD} \\ &= \vec{OM} + \vec{MD} \\ &= \vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{MD} \\ &= \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} \quad \text{para alguns escalares } \alpha, \beta, \gamma. \end{aligned}$$

Portanto $\vec{x}$ é combinação linear de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Suponha que

$$\vec{x} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \alpha' \vec{u} + \beta' \vec{v} + \gamma' \vec{w}.$$

$$\text{Então } (\alpha - \alpha') \vec{u} + (\beta - \beta') \vec{v} + (\gamma - \gamma') \vec{w} = \vec{0}.$$

$$\text{Como } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ são LI, temos } \begin{cases} \alpha' - \alpha = 0 \\ \beta' - \beta = 0 \\ \gamma' - \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \\ \gamma = \gamma' \end{matrix},$$

ou seja, a combinação linear é única. $\square$

Observação

Como a combinação linear na proposição anterior é única, podemos identificar o vetor $\vec{x} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}$ com a tripla (α, β, γ) de números reais.