

Integrais duplas sobre regiões genericas

Vamos agora estender o conceito de integral dupla para regiões no plano mais gerais, como a região D ilustrada na Figura 10.

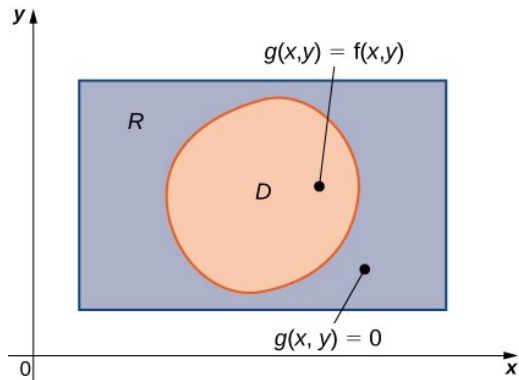


Figura: 10.

Dada $D \subset \mathbb{R}^2$ uma região limitada, considere uma região retangular R contendo D . Definimos uma nova função g com domínio R por

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in D \\ 0 & \text{se } (x, y) \in R \text{ mas } (x, y) \notin D \end{cases}$$

Se g for integrável sobre R , então definimos a integral dupla de f sobre D por

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R g(x, y) dA.$$

Essa definição faz sentido porque R é um retângulo e, portanto, $\iint_R g(x, y) dA$ já está definida. O procedimento usado é razoável, pois os valores de $g(x, y)$ são 0 quando (x, y) está fora do conjunto D e dessa forma não contribuem para o valor da integral. Isso significa que não importa qual o retângulo R tomado, desde que contenha D .

Pelo Teorema 2, note que se a fronteira de D for uma união finita de curvas de classe C^1 , e se f for contínua em D , então g é integrável em R .

No caso de $f(x, y) \geq 0$, podemos interpretar $\iint_D f(x, y) dA$ como o volume do sólido contido acima de D e abaixo do gráfico de f .

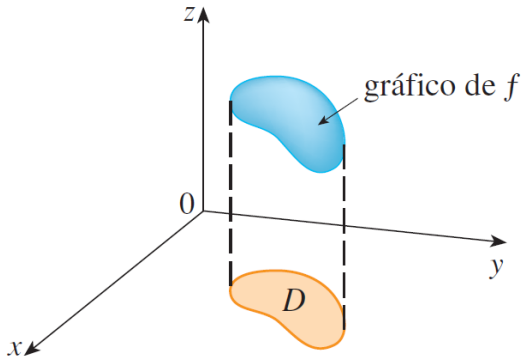


Figura: 11. (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

Integrais Iteradas

Suponha que $f(x, y)$ seja uma função contínua no retângulo

$R = [a, b] \times [c, d]$. Usaremos a notação $\int_c^d f(x, y) dy$ significando que $x \in [a, b]$ é mantido fixo e $f(x, y)$ é integrada em relação a y no intervalo $[c, d]$. Esse procedimento é chamado integração parcial em relação a y . Como $\int_c^d f(x, y) dy$ é um número que depende do valor de x , ele define uma função de x :

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Se agora integrarmos a função $A(x)$ com relação à variável x no intervalo $[a, b]$, obtemos

$$\int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx. \quad (2)$$

A integral do lado direito em (2) é chamada **integral iterada**. Em geral, os colchetes são omitidos. Assim.

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \quad (3)$$

significa que primeiro integramos com relação a y de c a d e depois em relação a x de a até b . Da mesma forma, a integral iterada

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy \quad (4)$$

significa que primeiro integramos com relação a x de a a b e depois em relação a y de c até d . Observe que em ambas as equações (20) e (9), operamos de dentro para fora.

Exemplo 2. Calcule o valor das integrais iteradas

(a) $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx$

(b) $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy$

Solução.

(a)

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx &= \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y \, dy \right] dx = \int_0^3 \left[x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_{y=1}^{y=2} \right] dx \\ &= \int_0^3 \left[\frac{3}{2} x^2 \right] dx = \frac{x^3}{2} \Big|_0^3 = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy &= \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y \, dx \right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \Big|_{x=0}^{x=3} \right] dy \\ &= \int_1^2 9y \, dy = 9 \frac{y^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

Observe que no Exemplo 1 obtemos a mesma resposta se integramos primeiro em relação a y ou a x . Em geral acontece (veja o Teorema 5) de as duas integrais iteradas das Equações 3 e 4 serem sempre iguais, ou seja, a ordem da integração não é importante.

O seguinte teorema fornece um método prático para calcular algumas integrais duplas por meio de integral iterada em qualquer ordem.

Teorema 5 (Teorema de Fubini). Se $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

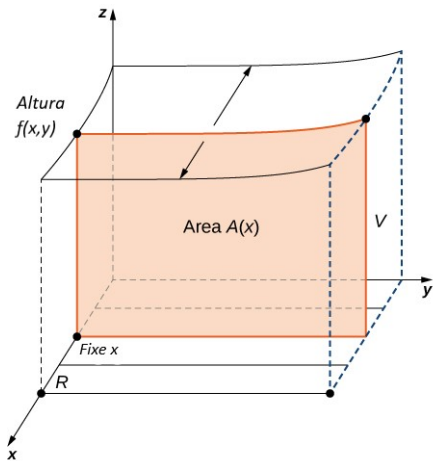
Em verdade, esse resultado vale se supusermos que f seja limitada em $R = [a, b] \times [c, d]$, f podendo ser descontínua num número finito de curvas de classe C^1 , e as integrais iteradas existam.

O Teorema de Fubini tem uma **interpretação geométrica** simples, ilustrada na Figura 18. Se f é contínua e $f(x, y) \geq 0$ em $R = [a, b] \times [c, d]$, o número $\iint_R f(x, y) dA$ é o volume do sólido S que está acima de R e abaixo do gráfico de $z = f(x, y)$. Para cada x no intervalo $[a, b]$, a integral $A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ é a área da seção transversal de S em um plano perpendicular ao eixo x , veja Figura 18(a). Pelo princípio de Cavalieri, o volume de S é $V = \int_a^b A(x) dx$. Portanto,

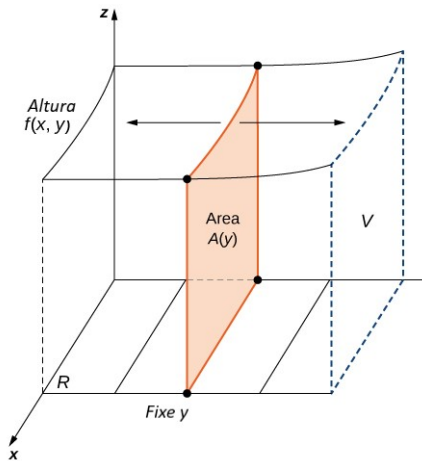
$$\iint_R f(x, y) dA = V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

Uma interpretação semelhante, usando a seção transversal perpendicular ao eixo y como na Figura 18(b), mostra que

$$\iint_R f(x, y) dA = V = \int_c^d A(y) dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$



(a)



(b)

Figura: 12. (a) Integrando primeiro em relação a y e depois em relação a x para encontrar a área $A(x)$ e depois o volume V ; (b) integrando primeiro em relação a x e depois em relação a y para encontrar a área $A(y)$ e depois o volume V .

Exemplo 3. Calcule o volume do sólido S que é limitado pelo parabolóide elíptico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, pelos planos $x = 2$ e $y = 2$ e pelos três planos coordenados. (resposta 48)

Solução. Observemos que o sólido S está abaixo do gráfico da função $z = 16 - x^2 - 2y^2$ definida no retângulo $R = [0, 2] \times [0, 2]$. Como esta função é positiva, podemos calcular o volume do sólido usando a integral dupla. Pelo Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} V &= \iint_R (16 - x^2 - 2y^2) dA = \int_0^2 \left[\int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2) dx \right] dy \\ &= \int_0^2 \left(16x - \frac{x^3}{3} - 2y^2x \right) \Big|_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{88}{3} - 4y^2 \right) dy = \left(\frac{88y}{3} - \frac{4y^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 48. \end{aligned}$$

Exemplo 4. Calcule a integral dupla $\iint_R y \sin(xy) dA$, onde $R = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \pi\}$.

Solução 1. Integrando primeiro em relação a x , obtemos

$$\begin{aligned}\iint_R y \sin(xy) dA &= \int_0^\pi \int_1^2 y \sin(xy) dx dy = \int_0^\pi [-\cos(xy)] \Big|_{x=1}^{x=2} dy \\ &= \int_0^\pi (-\cos(2y) + \cos y) dy = \left(-\frac{1}{2} \sin(2y) + \sin y \right) \Big|_0^\pi = 0\end{aligned}$$

Solução 2. Se agora calcularmos a integral dupla usando as integrais iteradas na ordem invertida, obtemos

$$\iint_R y \sin(xy) dA = \int_1^2 \left[\int_0^\pi y \sin(xy) dy \right] dx.$$

Para calcular a integral interna, usamos a integração por partes

$$u = y \quad dv = \sin(xy)dy$$

$$du = dy \quad v = -\frac{\cos(xy)}{x}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} y \sin(xy) dy &= -\frac{y \cos(xy)}{x} \Big|_{y=0}^{y=\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(xy)}{x} dy \\ &= -\frac{\pi \cos(\pi x)}{x} + \frac{\sin(xy)}{x^2} \Big|_{y=0}^{y=\pi} \\ &= -\frac{\pi \cos(\pi x)}{x} + \frac{\sin(\pi x)}{x^2}\end{aligned}$$

Integrando o primeiro termo por partes com $u = -1/x$ e $dv = \pi \cos(\pi x)dx$, obtemos

$$\int -\frac{\pi \cos(\pi x)}{x} dx = -\frac{\sin(\pi x)}{x} - \int \frac{\sin(\pi x)}{x^2} dx.$$

Logo,

$$\int \left(-\frac{\pi \cos(\pi x)}{x} + \frac{\sin(\pi x)}{x^2} \right) dx = -\frac{\sin(\pi x)}{x}$$

e assim

$$\begin{aligned} \iint_R y \sin(xy) dA &= \int_1^2 \left[\int_0^\pi y \sin(xy) dy \right] dx \\ &= -\frac{\sin(\pi x)}{x} \Big|_{x=1}^{x=2} \\ &= -\frac{\sin 2\pi}{2} + \sin \pi = 0. \end{aligned}$$

No Exemplo 4, a solução 1 é muito mais simples que a 2. Portanto ao calcular uma integral dupla é recomendável verificar se a ordem de integração pode simplificar os cálculos.

Exemplo 5. Calcule a integral dupla $\iint_R \sin x \cos y dA$, onde $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2\}$. (resposta 1).

Note que o Exemplo 4 é caso particular de

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} g(x)h(y) dA = \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy.$$