

2. Sequências monotônicas

(8)

Definição: Uma sequência (a_n) é dita crescente se
$$m, n \in \mathbb{N}, m < n \Rightarrow a_m \leq a_n.$$

Caso ocorrer $a_m \geq a_n$, diremos que (a_n) é decrecente.
A sequência (a_n) é chamada monótona se for crescente ou decrescente.

Obs.: Uma sequência (a_n) é crescente (resp. decrescente) se, e somente se, $n \geq 1 \Rightarrow a_n \leq a_{n+1}$ (resp. $n \geq 1 \Rightarrow a_n \geq a_{n+1}$).

Exemplo: Considere a sequência (a_n) dada por
$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad \forall n \geq 1.$$

Dado $n \geq 1$, tem-se

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = a_{n+1},$$

mostrando que (a_n) é decrescente.

Definição: Uma sequência (a_n) é dita limitada superiormente (resp. inferiormente) se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq M$ (resp. $a_n \geq M$), $\forall n \in \mathbb{N}$. Diremos simplesmente que (a_n) é limitada se existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha \leq a_n \leq \beta$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplo: A sequência (a_n) dada por $a_n = n!$ é 9.
crescente, limitada inferiormente e não-limitada
superiormente. Além disso, como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, tem-se
que (a_n) é divergente.

Teorema: Toda sequência limitada e monótona é
convergente. Em particular, se uma sequência (a_n)
for monótona mas não for limitada, então (a_n)
diverge para $+\infty$ ou $-\infty$.

Dem.: Considere uma sequência (a_n) que seja crescente
e limitada superiormente. Provemos que (a_n) é con-
vergente. De fato, o conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ é não-
vazio e limitado superiormente, logo admite su-
premo. Seja

$$a = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Provaremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Dado $\varepsilon > 0$, quere-
mos exibir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Como a é o supremo, tem-se que $a - \varepsilon < a$ não é
cota superior de $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$
tal que $a - \varepsilon < a_{n_0}$. Agora, como (a_n) é crescente,

tem-se

(10.)

$$n \geq n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon,$$

ou seja,

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Suponha agora que (a_n) seja crescente e que não seja limitada superiormente. Assim, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_0} > \varepsilon$. Como (a_n) é crescente, tem-se

$$n \geq n_0 \Rightarrow a_n \geq a_{n_0} > \varepsilon,$$

ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$. □

Exemplo: Considere a sequência (a_n) dada por

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Para cada $n \geq 1$, tem-se

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \geq \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_2^3 \frac{1}{x} dx + \dots + \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \\ &= \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1). \end{aligned}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = +\infty$, segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$,

ou seja, (a_n) é divergente.

Exemplo: Considere a sequência (a_n) dada por (11.)

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

Provamos que (a_n) é crescente e limitada superiormente, logo convergente. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, com

$1 \leq m < n$, tem-se

$$a_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} + \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = a_n,$$

provando que (a_n) é crescente. Além disso, temos:

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \\ &\leq 1 + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx + \int_2^3 \frac{1}{x^2} dx + \dots + \int_{n-1}^n \frac{1}{x^2} dx \\ &= 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{x} \Big|_1^n = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, tem-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq 2$, e isso prova

que (a_n) é convergente, i.e., existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a. \quad \square$$