

Métricas Riemannianas

O conceito de variedade diferenciável foi introduzido por Riemann, ainda que de forma vaga, em seu famoso trabalho [?]. A fim de poder calcular distâncias na variedade, Riemann introduziu a noção de métrica, sendo uma família de produtos internos que variam de forma diferenciável nos espaços tangentes da variedade diferenciável M^n .

Definição 1. Uma *métrica Riemanniana* em M^n é uma correspondência $\langle, \rangle$ que associa, a cada ponto $p \in M$, uma forma bilinear simétrica positivo-definida $\langle, \rangle_p$ em $T_p M$, de forma que a função

$$p \in M \mapsto \langle X(p), Y(p) \rangle_p$$

seja diferenciável, para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

De forma equivalente, uma métrica Riemanniana em M^n é uma seção diferenciável positivo-definida do fibrado vetorial $S^2 T^* M$, constituído das 2-formas bilineares simétricas em M^n . Uma *variedade Riemanniana* é simplesmente um par $(M, \langle, \rangle)$, onde M é uma variedade diferenciável e $\langle, \rangle$ é uma métrica Riemanniana em M .

Dado uma carta local (U, φ) na variedade Riemanniana $(M, \langle, \rangle)$, com coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$, denote por $dx_1, \dots, dx_n$ as 1-formas duais aos campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$, associados a φ . Dados um ponto $p \in U$ e vetores $v, w \in T_p M$, escrevamos

$$v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \quad \text{e} \quad w = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p).$$

Usando a bilinearidade da métrica, obtemos

$$\langle v, w \rangle_p = \sum_{i,j} g_{ij}(p) v_i w_j,$$

onde

$$g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle.$$

Em termos das 1-formas duais, podemos escrever

$$\langle, \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i \otimes dx_j.$$

Exemplo 2. No espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, identifiquemos

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

com $1 \leq i \leq n$ e qualquer que seja o ponto $p \in \mathbb{R}^n$. Assim, a métrica é dada por

$$\langle e_i, e_j \rangle_p = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij},$$

ou seja,

$$\langle, \rangle = dx_1^2 + \dots + dx_n^2.$$

Exemplo 3. A métrica Euclidiana em $\mathbb{R}^2$ é dada por

$$\langle, \rangle = dx^2 + dy^2.$$

Passando para coordenadas polares

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

obtemos

$$\begin{aligned} dx &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\ dy &= \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

Assim,

$$\langle, \rangle = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

Exemplo 4. Considere uma superfície de rotação M^2 em $\mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$\varphi(s, \theta) = (a(s) \cos \theta, a(s) \sin \theta, b(s)),$$

onde a, b são funções diferenciáveis definidas num intervalo aberto de $\mathbb{R}$, com $a > 0$, e $\gamma(s) = (a(s), 0, b(s))$ é a curva geratriz de M^2 , satisfazendo $\|\gamma'\|^2 = (a')^2 + (b')^2 = 1$. Considere M^2 munida da métrica Riemanniana $\langle, \rangle$ induzida de $\mathbb{R}^3$, i.e., cada plano tangente $T_p M$ está munido do produto interno induzido de $\mathbb{R}^3$. Tais planos tangentes são gerados pelas derivadas parciais

$$\begin{aligned} \varphi_s &= (a'(s) \cos \theta, a'(s) \sin \theta, b'(s)) \\ \varphi_\theta &= (-a(s) \sin \theta, a(s) \cos \theta, 0). \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \langle, \rangle &= \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle ds^2 + 2\langle \varphi_s, \varphi_\theta \rangle ds d\theta + \langle \varphi_\theta, \varphi_\theta \rangle d\theta^2 \\ &= ds^2 + a(s)^2 d\theta^2. \end{aligned}$$

Exemplo 5. Seja $f : M \rightarrow N$ uma imersão entre variedades diferenciáveis, i.e., para cada ponto $p \in M$, a diferencial $df(p)$ é uma aplicação linear injetora. Suponha que N esteja munida de uma métrica Riemanniana $\langle, \rangle$. Podemos usar tal métrica para definir uma métrica em M da seguinte forma: dados $p \in M$ e $v, w \in T_p M$, definimos

$$\langle v, w \rangle_p = \langle df(p) \cdot v, df(p) \cdot w \rangle_{f(p)}.$$

Como $df(p)$ é injetora, segue que $\langle, \rangle_p$ é positivo definido. Além disso, a diferenciabilidade de f e $\langle, \rangle$ implicam que a métrica definida em M também é diferenciável.

Exemplo 6. A esfera $\mathbb{S}^n$ admite uma métrica Riemanniana natural $\langle, \rangle$, induzida de $\mathbb{R}^{n+1}$ através de seu mergulho como a esfera de raio 1. Quando nos referirmos à esfera $\mathbb{S}^n$ como variedade Riemanniana, munida de sua métrica Riemanniana natural, diremos simplesmente *esfera Euclidiana*, ou *esfera unitária*.

Exemplo 7. No espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, considere a forma bilinear simétrica

$$\langle p, q \rangle = -p_1 q_1 + \sum_{i=2}^{n+1} p_i q_i, \quad (7.1)$$

com $p = (p_1, \dots, p_{n+1})$ e $q = (q_1, \dots, q_{n+1})$. Denotemos por $\mathbb{H}^n$ o subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ definido por

$$\mathbb{H}^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle p, p \rangle = -1 \text{ e } p_1 > 0\}.$$

Note que a equação $\langle p, p \rangle = -1$ define um hiperboloide de duas folhas em $\mathbb{R}^{n+1}$. Além disso, $\mathbb{H}^n$ é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$, dada como a pré-imagem $f^{-1}(-1)$ através da função diferenciável $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(p) = \langle p, p \rangle$, cuja diferencial é dada por $df(p) \cdot v = 2\langle p, v \rangle$, quaisquer que sejam $p, v \in \mathbb{R}^{n+1}$. Disso decorre, em particular, que

$$T_p \mathbb{H}^n = \{p\}^\perp. \quad (7.2)$$

Assim, podemos decompor $\mathbb{R}^{n+1}$ como sendo

$$\mathbb{R}^{n+1} = T_p \mathbb{R}^{n+1} = T_p \mathbb{H}^n \oplus \text{span}\{p\}, \quad (7.3)$$

para todo $p \in \mathbb{H}^n$. Como a forma (7.1) tem índice 1, segue que $T_p \mathbb{H}^n$ tem índice 0, visto que $\langle p, p \rangle < 0$. Portanto, o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ induz uma métrica positivo-definida em $\mathbb{H}^n$, de modo que $\mathbb{H}^n$ torna-se uma variedade Riemanniana, chamada o *espaço hiperbólico real* de dimensão n .

Exemplo 8. Dados duas variedades Riemannianas $(M_1, \langle \cdot, \cdot \rangle^1)$ e $(M_2, \langle \cdot, \cdot \rangle^2)$, a variedade produto $M = M_1 \times M_2$ admite uma métrica natural $\langle \cdot, \cdot \rangle$, chamada a *métrica Riemanniana produto*, dada da seguinte forma. Dado um ponto $p = (p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$, lembre que o espaço tangente a M em p se decompõe como

$$T_p M = T_{p_1} M_1 \oplus T_{p_2} M_2.$$

Dados $v, w \in T_p M$, com $v = (v_1, v_2)$ e $w = (w_1, w_2)$, definimos

$$\langle v, w \rangle_p = \langle v_1, w_1 \rangle_{p_1}^1 + \langle v_2, w_2 \rangle_{p_2}^2.$$

Ou seja, se $\pi_i : M \rightarrow M_i$, $i = 1, 2$, denotam as projeções canônicas, então

$$\langle v, w \rangle_p = \langle d\pi_1(v), d\pi_1(w) \rangle_{p_1}^1 + \langle d\pi_2(v), d\pi_2(w) \rangle_{p_2}^2.$$

Disso decorre, em particular, que o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ pode ser visto como o produto Riemanniano de n cópias de $\mathbb{R}$.

Definição 9. Uma *isometria* entre duas variedades Riemannianas M e N é um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ que satisfaz

$$\langle v, w \rangle_p = \langle df(p) \cdot v, df(p) \cdot w \rangle_{f(p)},$$

para quaisquer $p \in M$ e $v, w \in T_p M$.

Dado uma variedade Riemanniana M , denote por $\text{Iso}(M)$ o conjunto de todas as isometrias de M . Com a operação de composição, $\text{Iso}(M)$ tem estrutura de grupo.

Teorema 10 (Myers-Steenrod [?]). *O grupo $\text{Iso}(M)$ tem a estrutura de grupo de Lie em relação à topologia compacto-aberta. A isotropia, em qualquer ponto, é compacto. Além disso, se M é compacta o mesmo vale para $\text{Iso}(M)$.*

Finalizamos esta seção com o seguinte fato importante.

Proposição 11. Toda variedade diferenciável M^n admite métrica Riemanniana.

Demonstração. Se $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ é um mergulho, dado pelo teorema de Whitney, o resultado segue do Exemplo 5. $\square$