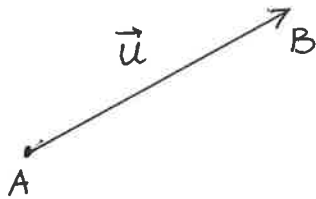


Vetores

Representação da força do vento

Um vetor no espaço é um segmento orientado da reta: é uma direção com intensidade (módulo) e sentido (orientação).



Um segmento da reta é representado por dois pontos A e B do espaço:

A é a origem,

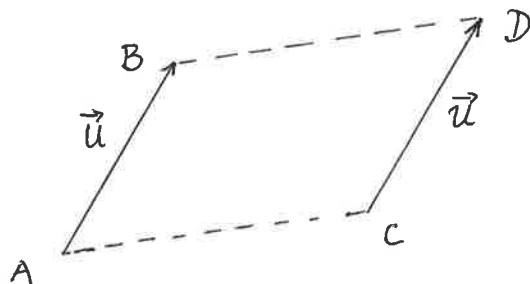
B é a extremidade.

Denotamos por $\overrightarrow{AB}$ o vetor com sentido indo de A para B e com módulo o comprimento do segmento AB.

Observe que $\overrightarrow{BA}$ possui sentido contrário de $\overrightarrow{AB}$, portanto representa um vetor distinto de $\overrightarrow{AB}$. O vetor $\overrightarrow{BA}$ é o oposto de $\overrightarrow{AB}$.

Como vimos na representação da força do vento, um vetor é livre e pode ser representado por vários pares de pontos no espaço.

Definição: $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ representam o mesmo vetor se ABDC é um paralelogramo.



$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

Observação: um vetor é livre; isto é, não depende da escolha dos pontos A e B que o representam.

Definição: A norma ou o módulo de um vetor $\vec{u}$ é o comprimento de qualquer de um de seus representantes.

Notação: $\|\vec{u}\|$

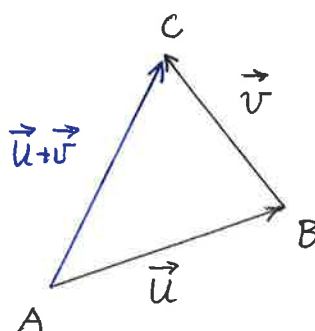
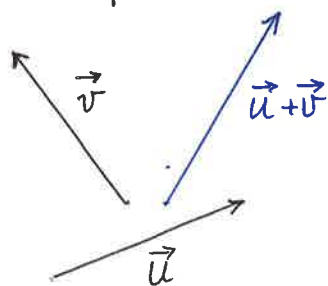
O vetor nulo é o vetor representado por $\overrightarrow{AA}$ para qualquer ponto A do espaço. Notação: $\vec{0}$.

Denotamos o conjunto de todos os vetores no espaço por V^3 , e o conjunto de todos os vetores em um plano por V^2 .

Vamos definir algumas operações em V^3 (valem também em V^2).

Adição de dois vetores

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores, com $\vec{u}$ representado por $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}$ representado por $\overrightarrow{BC}$.



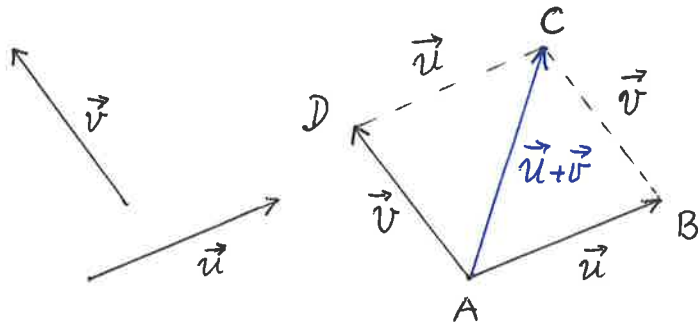
"fechar o triângulo"

O vetor soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o vetor representado por $\overrightarrow{AC}$, ou seja,

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$

Observe que na escolha da representação dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, a extremidade de $\vec{u}$ é a origem de $\vec{v}$.

Observe também que usamos o mesmo símbolo "+" da soma de números para representar a soma de dois vetores.



Podemos representar os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com a mesma origem:
 $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.

Usando a regra do paralelogramo, temos que

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Proposição (Propriedades da adição de vetores)

Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vetores quaisquer em V^3 . Então,

A1: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (Associativa)

A2: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (comutativa)

A3: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ (Elemento neutro)

A4: Para cada vetor $\vec{u}$, existe (Elemento oposto)
 um vetor $-\vec{u}$ tal que
 $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$

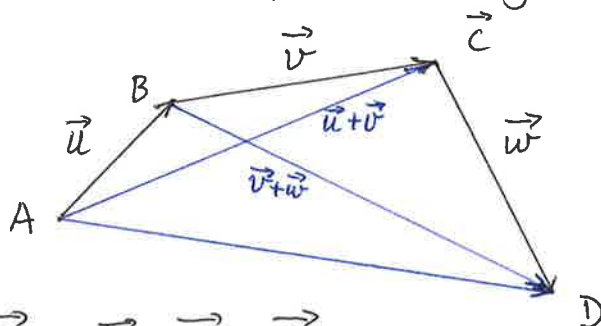
Demonstração

A1). Escolhamos representantes de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ como seguinte:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB},$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{BC},$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{CD}.$$



Então,

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD},$$

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.$$

Portanto $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

Exercício: completar a demonstração da proposição. $\square$

Observação: A adição de vetores tem as mesmas propriedades da adição de números reais. É por isso que usamos o símbolo "+" para representar esta operação.

[Na álgebra, V^3 munido da adição "+", ou seja $(V^3, +)$, vira um grupo abeliano ou grupo comutativo.]

Exercícios 1. Prove que $\vec{BC} + (-\vec{BA}) = \vec{AC}$.

2. Prove que $\vec{u} + \vec{x} = \vec{u} + \vec{y} \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$.

Multiplicação por escalar

Definição: Sejam α um número real (um escalar) e $\vec{u}$ um vetor.

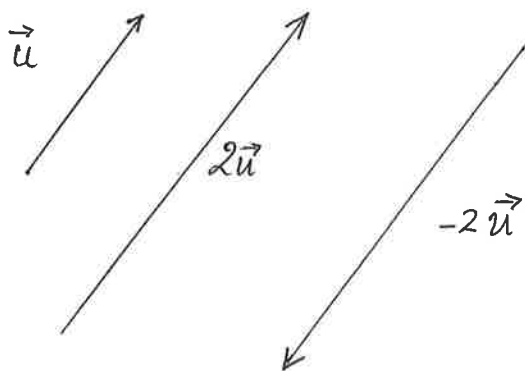
(1). Se $\alpha=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$, então $\alpha\vec{u}=\vec{0}$

(2). Se $\alpha \neq 0$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$, o vetor $\alpha\vec{u}$ caracteriza-se por

(a) $\alpha\vec{u} \parallel \vec{u}$

(b) $\alpha\vec{u}$ e $\vec{u}$ são de mesmo sentido se $\alpha > 0$ e de sentido contrário se $\alpha < 0$.

(c) $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \|\vec{u}\|$



Proposição (Propriedades da multiplicação por escalar)

Quaisquer que sejam os números reais α e β , e quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, valem as seguintes igualdades:

$$M1: \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \quad (\text{Distributividade})$$

$$M3: 1\vec{u} = \vec{u} \quad (\text{Elt neutro})$$

$$M2: (\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u} \quad (\text{Distributividade})$$

$$M4: \alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u} = \beta(\alpha\vec{u}) \quad (\text{Associatividade})$$

Observação $(V, +, \cdot)$ é um exemplo de um espaço vetorial real, um conceito que vocês vão encontrar na disciplina Álgebra Linear.

Exercícios

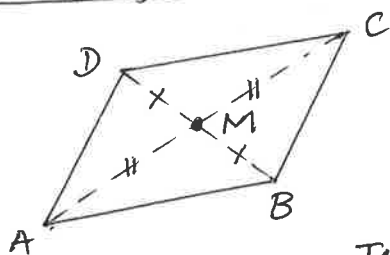
1. Mostre que se $\alpha \neq 0$, então $\alpha \vec{v} = \vec{w} \Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{\alpha} \vec{w}$.
2. Resolva o seguinte sistema nas incógnitas $\vec{x}$ e $\vec{y}$:

$$\begin{cases} \vec{x} + 2\vec{y} = \vec{u} \\ 3\vec{x} - \vec{y} = 2\vec{u} + \vec{v} \end{cases}$$

Aplicações geométricas

1. Proposição: As diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio.

Demonstração:



Seja M o ponto médio da diagonal AC, ou seja, $\vec{CM} = \vec{MA}$.

Precisamos mostrar que $\vec{BM} = \vec{MD}$.

Temos:

$$\begin{aligned} \vec{BM} &= \vec{BC} + \vec{CM} \\ &= \vec{BC} + \vec{MA} \quad (\text{pois M é pt médio de AC}) \\ &= \vec{MA} + \vec{BC} \quad (\text{adição é comutativa}) \\ &= \vec{MA} + \vec{AD} \quad (\text{ABCD é um paralelogramo}) \\ &= \vec{MD} \quad \square \end{aligned}$$

2. Veja Exercício 8 da Lista 1.