

Volumes e Integrais Duplas

Motivação. Consideremos uma região retangular fechada R no plano xy dada por

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Seja $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in R$. O gráfico de f representa uma superfície acima do plano xy com equação $z = f(x, y)$.

Seja S o sólido que está acima de R e abaixo do gráfico de f (Figura 1), isto é, a base do sólido é o retângulo R no plano xy e o seu topo é o gráfico de f . Em termos de conjunto, podemos escrever

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\}.$$

Queremos determinar o volume V do sólido S .

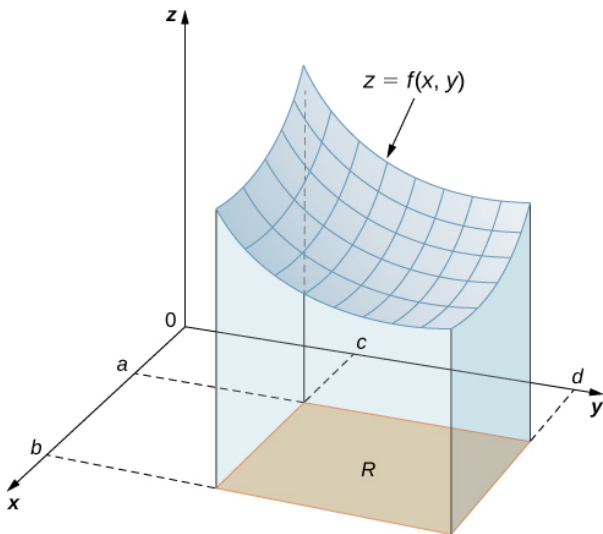


Figura: 1. Sólido S (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

O primeiro passo consiste em dividir a região R em sub-retângulos R_{ij} , cada um com área ΔA e com lados Δx e Δy .

Fazemos isso dividindo o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos de mesmo comprimento $\Delta x = (b - a)/m$ e dividindo o intervalo $[c, d]$ em n subintervalos de comprimento $\Delta y = (d - c)/n$. Traçando retas paralelas aos eixos coordenados passando pelos extremos dos subintervalos, conforme Figura 2, formamos os sub-retângulos R_{ij} definidos por

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

cada um dos quais com área $\Delta A = \Delta x \Delta y$.

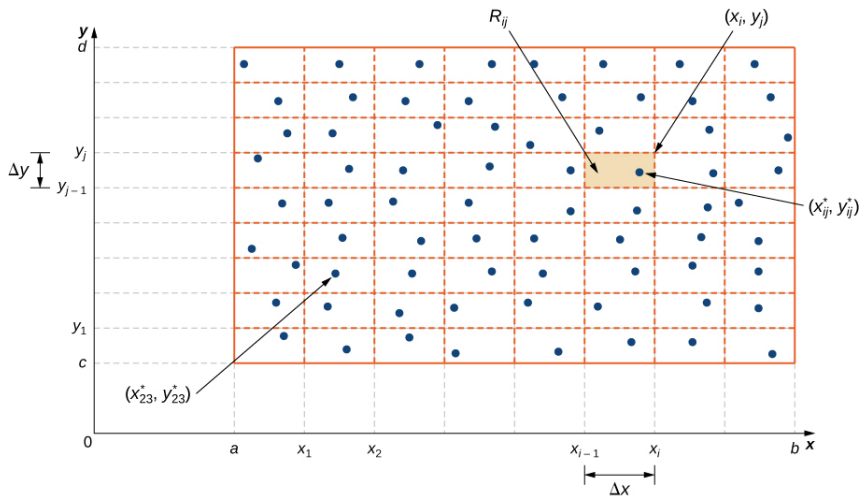


Figura: 2. O retângulo R é dividido em pequenos retângulos R_{ij} , cada um com área ΔA (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

Se escolhermos um ponto arbitrário, que chamaremos de **ponto amostral**, (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em cada subretângulo R_{ij} , poderemos aproximar a parte de S que está acima de cada R_{ij} por uma caixa retangular fina (ou coluna) com base R_{ij} e altura $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$, como mostrado na Figura 3. O volume dessa caixa é dado por

$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A.$$

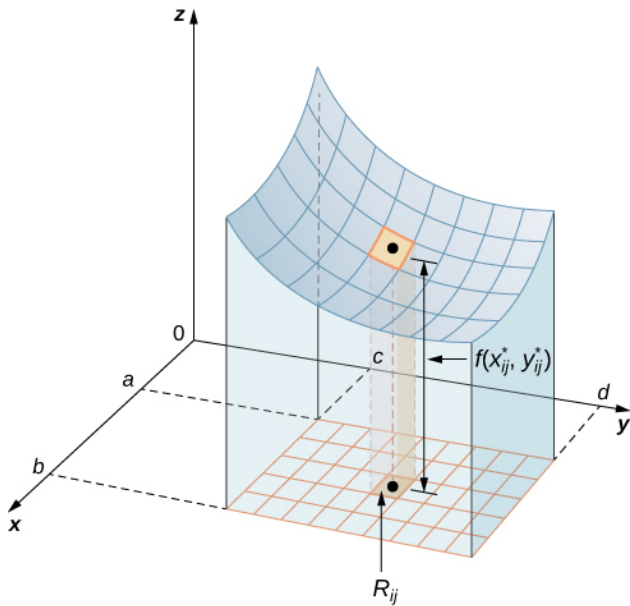


Figura: 3. (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

Se seguirmos com esse procedimento para todos os subretângulos e somarmos os volumes das caixas correspondentes, obteremos uma aproximação do volume total de S :

$$V \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A.$$

Veja Figura 4. Essa soma é conhecida como **soma de Riemann** e pode ser usada para aproximar o valor do volume do sólido. Aqui a soma significa que para cada subretângulo avaliamos a função no ponto escolhido, multiplicamos pela área de cada retângulo e depois somamos todos os resultados.

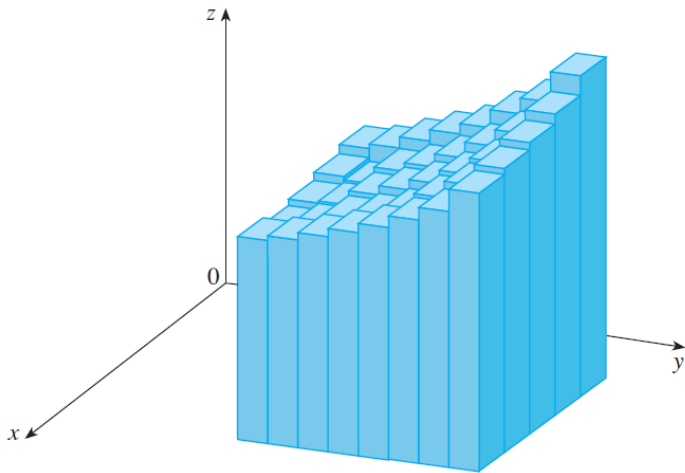


Figura: 4. (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

Nossa intuição diz que obteremos uma melhor aproximação do volume quando aumentamos os valores de m e n , e portanto devemos esperar que

$$V = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A, \quad (1)$$

se este limite existir.

Agora estamos prontos para definir a integral dupla.

Definição 1. A integral dupla da função $f(x, y)$ sobre o retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$ no plano xy é definida como

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A,$$

se esse limite existir e for independente da escolha dos pontos amostrais (x_{ij}^*, y_{ij}^*) nos subretângulos R_{ij} . Neste caso, diremos que f é integrável em R .

Teorema 1. Sejam $R = [a, b] \times [c, d]$ um retângulo no plano xy e $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ uma função **contínua** em R . Então f é integrável em R .

Mais ainda, funções não necessariamente contínuas num retângulo R podem ser integrais, como podemos ver por meio do próximo teorema.

Teorema 2. Sejam $R = [a, b] \times [c, d]$ um retângulo no plano xy e $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ uma função **limitada** em R . Se o conjunto de descontinuidade de f pode ser descrito como uma união finita de curvas de classe C^1 , então f é integrável em R .

As demonstrações destes teoremas requerem alguns conceitos que não são abordados, em geral, num primeiro curso de Cálculo II ou III, por isso serão omitidas aqui.

Comparando o limite (1) e a Definição 1, vemos que o volume pode ser escrito como uma integral dupla:

Se $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$ e $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in R$, então o volume V do sólido S , que está acima de R no plano xy e sob o gráfico de f é

$$V = \iint_R f(x, y) dA.$$

Exemplo 1. Estime o volume V do sólido S que está acima do retângulo $R = [0, 2] \times [0, 2]$ no plano xy e sob o gráfico de $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$.

Resolução. A função $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2 \geq 0$ para todo $(x, y) \in R$ e é contínua em R . Para encontrar o volume de S , dividimos o retângulo R em pequenos subretângulos R_{ij} , cada um com área ΔA e com lados Δx e Δy , e escolher (x_{ij}^*, y_{ij}^*) como pontos amostrais em cada R_{ij} . Assim,

$$\begin{aligned} V &= \iint_R (16 - x^2 - 2y^2) dA \\ &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [16 - (x_{ij}^*)^2 - 2(y_{ij}^*)^2] \Delta A \end{aligned}$$

Aproximando o volume usando uma soma de Riemann com $m = n = 2$ temos $\Delta A = \Delta x \Delta y = 1$. Além disso, escolhendo pontos amostrais como $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$ e $(2, 2)$, encontramos

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \\ &= f(1, 1) \Delta A + f(1, 2) \Delta A + f(2, 1) \Delta A + f(2, 2) \Delta A \\ &= 13 + 7 + 10 + 4 = 34. \end{aligned}$$

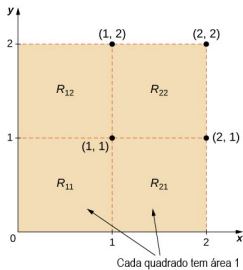


Figura: 5. (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

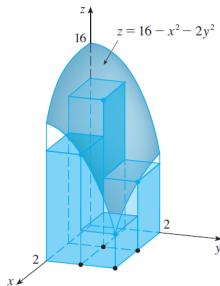


Figura: 6. (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

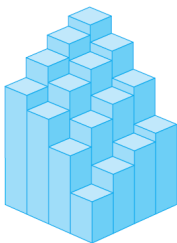
A aproximação do volume melhora quando aumentamos o número de quadrados. Por exemplo,

(a) $m = n = 4, V \approx 41,5$

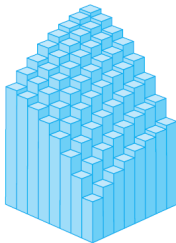
(b) $m = n = 8, V \approx 44,875$

(c) $m = n = 16, V \approx 46,46875$

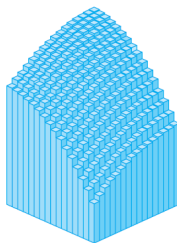
onde os pontos amostrais foram tomados como os vértices superior direito dos subretângulos R_{ij} . No Exemplo 3 seremos capazes de mostrar que o volume exato é 48.



(a) $m = n = 4, V \approx 41,5$



(b) $m = n = 8, V \approx 44,875$



(c) $m = n = 16, V \approx 46,46875$

Figura: 7. (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

Valor Médio

Em Cálculo I vimos que o valor médio de uma função integrável $f(x)$ de uma variável definida num intervalo $[a, b]$ é

$$f_{\text{méd}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Mais ainda, se $f(x)$ for contínua em $[a, b]$, então existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\bar{x}).$$

De modo semelhante definimos o **valor médio** de uma função integrável $f(x, y)$ num retângulo R como sendo

$$f_{\text{méd}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y) dA.$$

onde $A(R)$ é a área de R . É possível mostrar que se $f(x, y)$ for contínua em R , então existe $(\bar{x}, \bar{y}) \in R$ tal que

$$\frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y) dA = f(\bar{x}, \bar{y}).$$

Uma interpretação geométrica desse resultado pode ser dada se $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in R$. A equação

$$f_{\text{méd}} A(R) = \iint_R f(x, y) dA$$

diz que a caixa com base R e altura $f_{\text{méd}}$ tem o mesmo volume do sólido delimitado pelo gráfico de f .

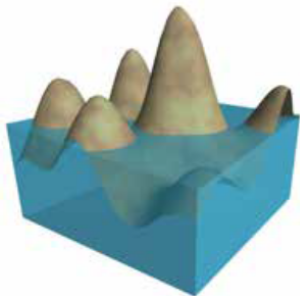


Figura: 8. (crédito: Cálculo Vol. II J. Stewart)

Exemplo 3. Um mapa de contorno é mostrado para uma função $f(x, y)$ no retângulo $R = [-3, 6] \times [-1, 4]$. Estime o valor médio da função $f(x, y)$.

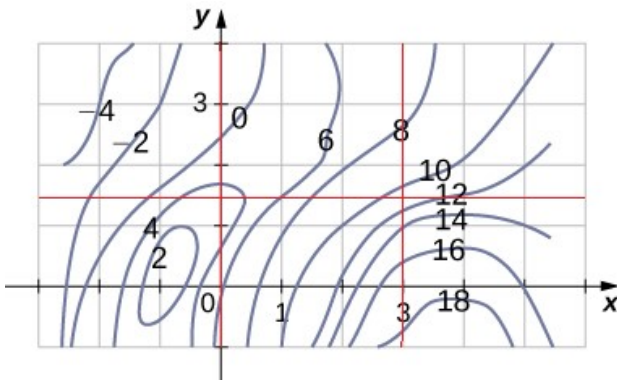


Figura: 9. Mapas de contornos de f

Resolução. O valor médio de médio da função f é

$$f_{\text{méd}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y) dA = \frac{1}{45} \iint_R f(x, y) dA.$$

Para estimar o valor dessa integral dupla, vamos usar uma soma de Riemann com $m = 3$, $n = 2$, onde o ponto amostral (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em R_{ij} é tomado como o ponto central de R_{ij} . Usando o mapa de contornos para estimar o valor de f no ponto central de cada subretângulo, obtemos

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &\approx \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \\ &\approx \Delta A [4 + (-2) + 10 + 6 + 16 + 10] \\ &= 3 \cdot 2,5[44] = 330. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f_{\text{méd}} \approx \frac{330}{45} \approx 7,333$$

Propriedades das Integrais Duplas

Teorema 3. Se $f, g : R \rightarrow \mathbb{R}$ são funções integráveis no retângulo R e $c \in \mathbb{R}$, então

i) $f + g$ é integrável em R e

$$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA$$

ii) cf é integrável em R e

$$\iint_R cf(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA$$

Teorema 4. Se $f, g : R \rightarrow \mathbb{R}$ são funções integráveis no retângulo R e $f(x, y) \leq g(x, y)$ para todo $(x, y) \in R$, então

$$\iint_R f(x, y) dA \leq \iint_R g(x, y) dA$$