

Teorema de Green

O Teorema de Green fornece a relação entre uma integral de linha ao redor de uma curva fechada simples C e uma integral dupla sobre a região do plano D delimitada por C . (Veja a Figura 1.)

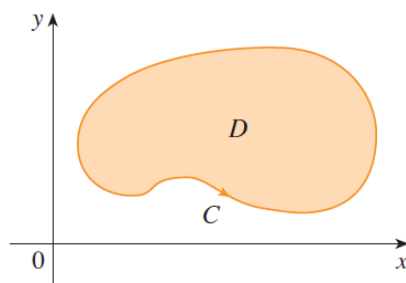


Figura 1:

Ao enunciarmos o Teorema de Green, usamos a convenção de que a orientação positiva de uma curva fechada simples C refere-se ao sentido anti-horário de C , percorrida uma só vez. Assim, se C é dada pela função vetorial $r(t)$, $a \leq t \leq b$, então a região D está sempre do lado esquerdo quando $r(t)$ percorre C . (Veja a Figura 2.)

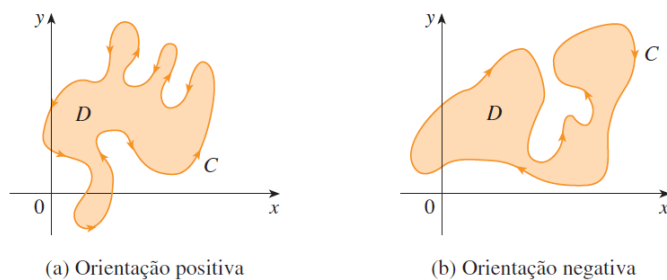


Figura 2:

No Teorema de Green faremos uso da seguinte notação da integral de linha do campo vetorial $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ ao longo de uma curva C

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C Pdx + Qdy.$$

Teorema de Green. Seja C uma curva fechada simples suave por trechos, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C . Se $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ for um campo vetorial tal que P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas ao longo de C e em todo D , então

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Observação. Outra notação para a curva na fronteira de D , positivamente orientada, é ∂D , daí a equação do Teorema de Green pode ser escrita como

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_{\partial D} Pdx + Qdy$$

Exemplo 1. Calcule $\oint_C x^4 dx + xy dy$, onde C é a curva triangular constituída pelos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(1, 0)$, de $(1, 0)$ a $(0, 1)$, e de $(0, 1)$ a $(0, 0)$.

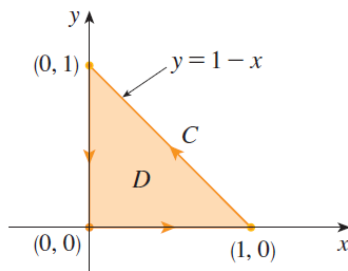


Figura 3:

Resolução. Poderíamos calcular esta integral de linha usando a definição, isso levaria ao cálculo separado de três integrais de linha sobre cada lado do triângulo. Em vez disso, vamos usar o Teorema de Green. Observe C é uma curva simples fechada suave por trechos e tem orientação positiva (veja a Figura 3). As componentes do campo vetorial $P(x, y) = x^4$ e $Q(x, y) = xy$ são contínuas e têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas ao longo de C e em toda a região triangular D delimitada por C , então

$$\begin{aligned} \oint_C x^4 dx + xy dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0) dy dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} y^2 dy \Big|_0^{1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 dx \\ &= -\frac{1}{6} (1-x)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Exemplo 2. Calcular a integral de linha

$$I = \oint_C \left(3y - e^{\sin x} + \sqrt{4+x^5} \right) dx + \left(7x + \sqrt{y^4+1} - e^{y^2} \right) dy,$$

onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 9$ orientada no sentido anti-horário.

Resolução. O cálculo direto dessa integral de linha parece uma tarefa difícil, mas o Teorema de Green fornece um outro modo. Como

$$P(x, y) = 3y - e^{\sin x} + \sqrt{4+x^5}, \quad Q(x, y) = 7x + \sqrt{y^4+1} - e^{y^2}$$

e

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 3, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 7$$

segue do Teorema de Green que

$$I = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dA = \iint_D [7 - 3] dA = 4 \iint_D dA = 4 \text{Área}(D) = 36\pi,$$

pois D é um disco de raio 3.

Nos Exemplos 1 e 2 consideramos que a integral dupla é mais fácil de calcular que a integral de linha. Mas as vezes é mais fácil calcular a integral de linha e nesse caso usaremos o Teorema de Green na ordem inversa.

Aplicação do Teorema de Green: Cálculo de área

Como a área de uma região D é $\iint_D 1 dA$, desejamos escolher P e Q tais que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Existem várias possibilidades, por exemplo:

1. $P(x, y) = 0$ e $Q(x, y) = x$;
2. $P(x, y) = -y$ e $Q(x, y) = 0$;
3. $P(x, y) = -\frac{1}{2}y$ e $Q(x, y) = \frac{1}{2}x$.

Assim, o Teorema de Green dá as seguintes fórmulas para a área de D :

- Para o campo vetorial dado em (1),

$$\text{Área}(D) = \oint_C x dy.$$

- Para o campo vetorial dado em (2),

$$\text{Área}(D) = - \oint_C y dx.$$

- Para o campo vetorial dado em (2),

$$\text{Área}(D) = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx$$

Exemplo 3. Calcule a área da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Resolução. A elipse tem parametrização $r(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Usando a terceira fórmula, temos

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx = \oint_C (-y, x) \cdot dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-b \sin t, a \cos t) \cdot (-a \sin t, b \cos t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab(\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab. \end{aligned}$$

Observação. O Teorema de Green pode ser aplicado para regiões com buracos, ou seja, regiões que não são simplesmente conexas.

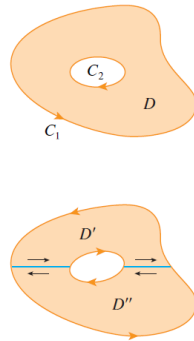


Figura 4:

Observe que a fronteira C da região D na Figura 4 é constituída por duas curvas fechadas simples C_1 e C_2 .

Assumimos que estas curvas são orientadas de modo que a região D está sempre do lado esquerdo enquanto a curva C é percorrida. Assim, o sentido anti-horário é positivo para a curva exterior C_1 , mas no sentido horário para a curva interior C_2 . Se dividirmos D em duas regiões D' e D'' , pela introdução das retas mostradas na

Figura 4, e então aplicamos o Teorema de Green a cada uma das regiões D' e D'' , obteremos

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA &= \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + \iint_{D''} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ &= \oint_{\partial D'} Pdx + Qdy + \oint_{\partial D''} Pdx + Qdy\end{aligned}$$

Como as integrais de linha sobre a fronteira comum são em sentido opostos, elas se cancelam e então obtemos

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_{C_1} Pdx + Qdy + \oint_{C_2} Pdx + Qdy = \oint_C Pdx + Qdy$$

que é o Teorema de Green para a região D .

Exemplo 4. Se $\vec{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}$, mostre que $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$ para toda curva fechada simples que circunda a origem $(0, 0)$ no sentido anti-horário.

Resolução. Como C é um caminho fechado arbitrário, não conseguimos calcular diretamente a integral de linha dada. Além disso, não podemos aplicar o Teorema de Green porque a curva circunda a origem, e assim a região delimitada por ela contém a origem $(0, 0)$, ou seja, essa região não está inteiramente contida no domínio de $\vec{F}$.

Para calcular essa integral de linha, vamos considerar um círculo anti-horário orientado C' com origem no centro e raio a , onde a é escolhido para ser pequeno o suficiente para que C' esteja contida na região limitada por C (ver Figura 5).

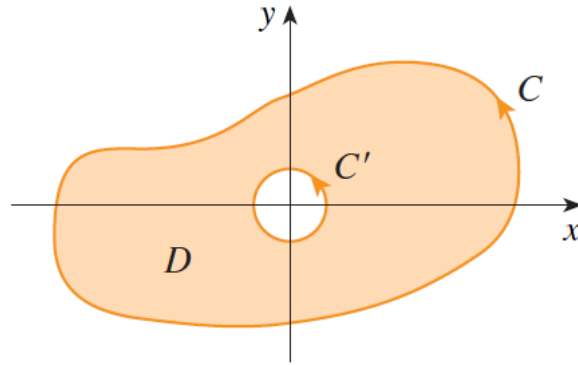


Figura 5:

Seja D a região limitada por C e C' . Então a orientação positiva da fronteira

de D é $C \cup (-C')$ e, aplicando a versão geral do Teorema de Green, temos

$$\begin{aligned}\oint_C Pdx + Qdy + \oint_{-C'} Pdx + Qdy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_D \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) dA \\ &= 0\end{aligned}$$

Logo

$$\oint_C Pdx + Qdy = - \oint_{-C'} Pdx + Qdy = \oint_{C'} Pdx + Qdy$$

isto é,

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Agora podemos calcular facilmente essa última integral usando a definição. Para isso, parametrizamos C' por $r(t) = (a \cos t, a \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Assim,

$$\begin{aligned}\oint_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(r(t)) \cdot r'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2\pi \frac{(-a \sin t)(-a \sin t) + (a \cos t)(a \cos t)}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\end{aligned}$$

Terminaremos esta aula utilizando o Teorema de Green para concluir a demonstração do Teorema 6 da Aula 18 que dá uma caracterização dos campos vetoriais no plano que são conservativos.

Teorema 6. Seja $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ um campo vetorial com funções coordenadas P e Q tendo derivadas parciais de primeira ordem contínuas numa região aberta e simplesmente conexa $D \subset \mathbb{R}^2$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, qualquer que seja a curva fechada suave por trechos C contida em D .
2. A integral de linha de $\vec{F}$ independe do caminho.
3. $\vec{F}$ é conservativo.
4. $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$ para todo $(x, y) \in D$.

Demonstração. Na Aula 18 mostramos que as três primeiras propriedades são equivalentes. Resta provar que a propriedade 4 implica qualquer uma das três primeiras.

Para isso, suponhamos que a propriedade 4 seja válida e seja C uma curva fechada simples suave por trechos qualquer contida no domínio D de $\vec{F}$ e seja R a região delimitada por C . Como D é simplesmente conexo, a região R também está contida em D . Pelo Teorema de Green,

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D 0 dA = 0.$$

Uma curva fechada que não seja simples se autointercepta em um ou mais pontos e pode ser dividida em várias curvas fechadas simples. Mostramos que as integrais de linha de $\vec{F}$ sobre essas curvas simples são todas 0 e, somando essas integrais, podemos ver que para qualquer curva fechada C a integral de linha é 0. Pelo Teorema 2 da Aula 18, a integral de linha de $\vec{F}$ é independente do caminho em D . Usando o Teorema 3 da Aula 18, concluímos que $\vec{F}$ é um campo vetorial conservativo.